NORDAN TVÅ

Grand Hotell i Marstrand, 24-26 april 1998

UPPFÖLJAREN arrangerades i det pittoreska och bilfria Marstrand, som är en av de två städer som ryms inom Kungälvs kommun i Bohuslän. Intresset var denna gång var så stort att inte alla deltagare kunde beredas rum på Grand Hotell, utan nio extra bäddar på det närbelägna härbärget *Alphyddan* fick tas i anspråk. Jämte en och annan solglimt bjöd vädrets makter på ett vederkvickande-vårregn och sedvanligt uppfriskande bohusländska havsvindar som beledsagare på promenader runt Marstrandsön och upp till Carlstens fästning. Tio vetenskapliga föredrag, inklusive en snabbkurs i komplex dynamik av Mattias Jonsson, avhölls i ett gemytligt krypin på hotellet.

DELTAGARE

Mats Andersson (Göteborg)
Jim Arlebrink (Borås)
Ulf Backlund (Umeå)
Ewa Bergqvist (Umeå)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Zbigniew Blocki (Krakow)
Jan Boman (Stockholm)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Magnus Carlehed (Östersund)
Hasse Carlsson (Göteborg)
Urban Cegrell (Umeå)
Henrik Delin (Göteborg)
Andrej Domrin (Moskva)
Peter Ebenfelt (Stockholm)
Charles Favre (Stockholm)
Lars Filipsson (Stockholm)
Anders Fällström (Sundsvall)
Peter Grenholm (Uppsala)
Vincent Guedj (Paris)
Thomas Hansson (Göteborg)
Lars Hörmander (Lund)
Björn Ivarsson (Uppsala)
Mattias Jonsson (Stockholm)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Maciej Klimek (Uppsala)
Nikolay Kruzhilin (Moskva)
Frank Kutzschebauch (Basel)
Finnur Lárusson (London)
Niklas Lindholm (Göteborg)
Erik Løw (Oslo)
Andreas Nilsson (Stockholm)
Mikael Passare (Stockholm)
Claudio Rea (Rom)
Timur Sadykov (Stockholm)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Ragnar Sigurdsson (Sundsvall)
Giuseppe Tomassini (Pisa)
Jonas Wiklund (Umeå)
Frank Wikström (Umeå)
Yang Xing (Umeå)
Ozan Öktem (Stockholm)
Nils Øvrelid (Oslo) [42 personer]

PROGRAM

Fredag 24 april

15.15-16.00 Urban Cegrell *The complex Monge–Ampère operator*
16.15-17.00 Maciej Klimek *Extremal plurisubharmonic functions*
17.30-18.15 Mattias Jonsson *Pluricomplex dynamics I*

Lördag 25 april

10.00-10.45 Charles Favre *Classification of special type of contracting germs in* $\mathbb{C}^2$*, and its application to geometry*
11.00-11.45 Nils Øvrelid *Boundary regularity for the* $\bar{\partial}$*-equation in domains with irregular or non pseudoconvex boundary points*
14.30-15.15 Peter Ebenfelt *Real hypersurfaces in complex space and their mappings*
15.45-16.30 Jan Boman *On unique continuation of microanalytic distributions*
16.45-17.30 Mattias Jonsson *Pluricomplex dynamics II*

Söndag 26 april

10.00-10.45 Mattias Jonsson *Pluricomplex dynamics III*
11.15-12.00 Ragnar Sigurdsson *The relative extremal function*

ARRANGÖRER

Mats Andersson, Bo Berndtsson och Henrik Delin

FINANSIÄRER

Naturvetenskapliga forskningsrådet
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Urban Cegrell

Den komplexa Monge–Ampère-operatorn

Den komplexa Monge–Ampère-operatorn MA är av fundamental betydelse inom pluripotentialteorin, där den spelar en roll liknande Laplace-operatorns i klassisk potentialteori. Laplace-operatorn är en linjär differentialoperator och kan således definieras på rummet av alla distributioner, medan den komplexa Monge–Ampère-operatorn är icke-linjär och inte ens kan utvidgas till att verka på alla plurisubharmoniska funktioner. Operatorn MA är dessutom diskontinuerlig i den svaga *-topologin.

Det finns två apekter hos problemet med att utvidga definitionsmängden för den komplexa Monge–Ampère-operatorn:

1) Givet en plurisubharmonisk funktion φ, när kan man finna ett positivt mått μ med egenskapen att det för varje avtagande följd φ_j av släta plurisubharmoniska funktioner som konvergerar mot φ gäller att $\left(dd^c\varphi_j\right)^n \to \mu$?
2) Givet ett positivt mått μ, när kan man finna en plurisubharmonisk funktion φ som i punkt 1?

Exempel på klasser av plurisubharmoniska funktioner där MA är väldefinierad och har goda egenskaper är de så kallade $\mathcal{E}_p$-klasserna. Här utgörs $\mathcal{E}_0$ av de begränsade plurisubharmoniska φ som har randvärden lika med noll och vars Monge–Ampère-mått har ändlig totalmassa. För $p \geq 1$ består $\mathcal{E}_p$ av de φ som kan approximeras med avtagande följder φ_j av funktioner i $\mathcal{E}_0$ som uppfyller

$$\sup_j \int_\Omega (-\varphi_j)^p \left(dd^c\varphi_j\right)^n < \infty.$$

Klassen $\mathcal{E}_1$ kan beskrivas som de plurisubharmoniska funktionerna med ändlig plurikomplex energi. Med hjälp av klassen $\mathcal{E}_p$ kan fråga 2 ovan besvaras. Om Ω nämligen är ett begränsat hyperkonvext område och om μ är ett positivt mått på Ω sådant att

$$\int (-\varphi)^p \, d\mu < A\left[\int_\Omega (-\varphi)^p \left(dd^c\varphi\right)^n\right]^{p/(n+p)},$$

för alla $\varphi \in \mathcal{E}_0$, då finns en entydigt bestämd funktion $\psi \in \mathcal{E}_p$ med $MA(\psi) = \left(dd^c\psi\right)^n = \mu$. Vi diskuterar också en mer lokalt definierad funktionsklass $\mathcal{E}^{\mathrm{loc}}$.

Litteraturhänvisning

URBAN CEGRELL Pluricomplex energy *Acta Mathematica* **180** (1998) 187-217

Maciej Klimek

Extremala plurisubharmoniska funktioner

Under det tidiga nittiotalet var det en grupp forskare, bestående av bland andra Richard Aron, Bernard Beauzamy och Per Enflo, som undersökte diverse polynomuppskattningar, av vilka vissa låter sig väl hanteras med hjälp av plurisubharmoniska extremalfunktioner. Denna och annan näraliggande forskning ledde mig till att 1995 införa en definition av avståndet mellan två plurireguljära mängder. Detta begrepp liknar på ett ytligt plan Hausdorff-avståndet mellan två kompakta mängder, men det uttrycks i termer av plurikomplexa Green-funktioner. Låt V_E beteckna den plurikomplexa Green-funktionen hörande till en kompakt mängd $E \subset \mathbb{C}^n$, och låt $\mathcal{R}$ beteckna familjen av alla plurireguljära polynomkonvexa kompakta delmängder av $\mathbb{C}^n$. Vi definierar då avståndet mellan $E, F \in \mathcal{R}$ som

$$\Gamma(E,F) = \max\{\|V_E\|_F, \|V_F\|_E\}.$$

Det visar sig att denna avståndsfunktion gör $(\mathcal{R}, \Gamma)$ till ett fullständigt metriskt rum, och för varje reguljär polynomavbildning $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ blir mängdfunktionen $E \mapsto P^{-1}(E)$ en kontraktion. Speciellt har denna alltså en fixpunkt i $\mathcal{R}$, enligt Stefan Banachs allmänna kontraktionsprincip, och denna fixpunkt visar sig exakt sammanfalla med den ifyllda Julia-mängden för avbildningen P.

Liksom det vanliga Hausdorff-avståndet uppför sig även metriken Γ väl med avseende på mängteoretiska operationer. Detta faktum medför att om $P_1, \ldots, P_k$ är reguljära polynomavbildningar så är avbildningen

$$E \mapsto \text{polynomhöljet av } \left[\bigcup_{j=1}^{k} P_j^{-1}(E)\right]$$

också en kontraktion, nu med en komplicerad "sammansatt" Julia-mängd som fixpunkt. Vi kan visa att en sådan sammansatt Julia-mängd beror analytiskt av de genererande polynomen i den mening som är bruklig inom teorin för analytiska multifunktioner. Å andra sidan bildar de enskilda avbildningarna

$$E \mapsto P_j^{-1}(E), \qquad j = 1, \ldots, k,$$

ett iterativt funktionssystem med avseende på Hausdorff-metriken som genereras av Γ, och det visar sig att attraktorn för detta system är nära förbunden med den sammansatta Julia-mängden.

Litteraturhänvisningar

MACIEJ KLIMEK Metrics associated with extremal plurisubharmonic functions *Proceedings of the American Mathematical Society* **123** (1995) 2763-2770

MACIEJ KLIMEK Iteration of analytic multifunctions *Nagoya Mathematical Journal* **162** (2001) 19-40

Mattias Jonsson

Plurikomplex dynamik I

Polynomiell dynamik på $\mathbb{C}$: Låt X beteckna en av de komplexa mångfalderna $\mathbb{C}^k$ eller $\mathbb{P}^k$, och låt $f\colon X \to X$ vara en holomorf avbildning. Dessa föreläsningar behandlar uppförandet hos de upprepade sammansättningarna $f^n = f \circ \cdots \circ f$ då $n \to \pm\infty$. Bland annat studerar vi *banorna*, det vill säga $\{f^n p\}_{n \geq 0}$ eller $\{f^n p\}_{n \in \mathbb{Z}}$, de *periodiska punkterna*, som uppfyller $f^n p = p$, samt vissa *invarianta* objekt, till exempel invarianta mått och strömmar.

Efter lite bakgrund om enkla topologiska modeller för dynamik, som till exempel Stephen Smales hästsko, fokuserar vi på dynamiken hos polynomavbildningar av det komplexa planet. Givet ett polynom

$$p(z) = z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots + a_0,$$

betraktar vi mängden $K = \{z \in \mathbb{C};\ p^n z \text{ begränsad då } n \to \infty\}$ och dess rand $J = \partial K$, som kallas Julia-mängden för p.

Viktiga verktyg är Montels sats om normala familjer och grundläggande potentialteori. Den logaritmiska Green-funktionen för den kompakta mängden K visar sig kunna skrivas explicit som $G(z) = \lim_{n\to\infty} \log^+ |p^n(z)|$ och motsvarande harmoniska mått $\mu = (2\pi)^{-1} \Delta G$ är invariant med avseende på p. Måttet μ kan också beskrivas med hjälp av de periodiska punkterna hos p via formeln $\mu = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \sum_{p^n z = z} \delta_z$. Därför är de periodiska punkterna täta i $J = \operatorname{supp} \mu$.

I själva verket gäller formeln $\mu = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \sum_{p^n z = w} \delta_z$ för nästan varje punkt $w \in \mathbb{C}$. Detta implicerar att μ är ergodiskt, vilket betyder att varje mängd E som är invariant under p måste uppfylla $\mu(E) = 0$ eller $\mu(E) = 1$. För nästan alla (med avseende på μ) punkter $w \in \mathbb{C}$ gäller att banan $\{p^n w\}_{n \geq 0}$ är tät i J.

Litteraturhänvisning

LENNART CARLESON & THEODORE GAMELIN Complex dynamics
Universitext: Tracts in Mathematics Springer-Verlag, New York (1993) x+175 s.

Charles Favre

Klassifikation av en speciell typ av kontraktiva groddar i $\mathbb{C}^2$, och dess tillämpning i geometri

En komplexanalytisk grodd $f\colon (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ sägs vara *rigid* om unionen $\mathcal{C}(f^\infty)$ av de kritiska mängderna hos alla dess iterationer f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, och så vidare, är lika med antingen den tomma mängden, eller en slät kurva genom origo, eller två släta transversella kurvor genom origo. I dessa tre fall talar vi om reguljära, irreducibla, respektive reducibla rigida groddar.

Det visar sig att varje kontraktiv rigid grodd i två dimensioner via ett lokalt biholomorft koordinatbyte kan överföras till en polynomiell grodd av normalform hörande till en av sju olika klasser. Dessa klasser kan beskrivas genom att ange dels rangen hos Jacobimatrisen Df_0 i origo, dels den eventuella inverterbarheten hos den linjära avbildningen f_* på fundamentalgruppen för komplementet till $\mathcal{C}(f^\infty)$. Så här ser klassindelningen ut:

1) Reguljära groddar (för vilka Df_0 har rang 2)
2) Irreducibla groddar sådana att Df_0 har rang 1 och f_* är inverterbar
3) Irreducibla groddar sådana att Df_0 har rang 1 och f_* ej är inverterbar
4) Irreducibla groddar sådana att Df_0 har rang 0
5) Reducibla groddar sådana att Df_0 har rang 1
6) Reducibla groddar sådana att Df_0 har rang 0 och f_* är inverterbar
7) Reducibla groddar sådana att Df_0 har rang 0 och f_* ej är inverterbar

Med hjälp av vår klassifikation av rigida groddar kan vi också ge en fullständig klassificering av de så kallade Kato-ytorna. Dessa ytor studerades först av Masahide Kato 1977, och de utgörs av de kompakta komplexa ytor S som innehåller ett globalt sfäriskt skal (en holomorf bild av standardskalet $1-\varepsilon < |z|^2 < 1+\varepsilon$) som inte separerar S. De kan ses som generaliseringar av de klassiska Hopf-ytorna, och uppstår som kvotrum under verkan av en kontraktiv rigid grodd. Vi bygger vidare på arbeten av Georges Dloussky som utvecklat idén att studera Kato-ytor via de associerade groddarna.

Litteraturhänvisning

Charles Favre Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **79** (2000) 475-514

Nils Øvrelid

Randregularitet hos $\bar\partial$-problemet i områden med irreguljära eller icke pseudokonvexa randpunkter

Föredraget beskriver en utvidgning av Joseph Kohns och Louis Nirenbergs subelliptiska lokala regularitetsresultat från 1965 till områden D hos vilka endast en del $E \subset \partial D$ av randen är slät, och där $\bar\partial$-Neumann-villkoren bara förutsätts hålla på delmängden E. Mer precist låter vi D vara ett område i en hermitsk mångfald X, och E en slät, relativt öppen delmängd av ∂D. Vi väljer två testfunktioner ζ och ζ' i $C_0^\infty(D \cup E)$, sådana att $\zeta' = 1$ på stödet för ζ. Anta nu att formerna $u, f \in L^2_{p,q}(D)$ uppfyller $\bar\partial\vartheta u + \vartheta\bar\partial u = f$ i svag mening, samt att u satisfierar $\bar\partial$-Neumann-villkoren på E. Anta vidare att randpunkterna i E är ε-subelliptiska för operatorn $\bar\partial$ på (p,q)-former. Då kan vi visa de tangentiella Sobolev-uppskattningarna

$$\|\zeta\vartheta u\|_{s+\varepsilon} + \|\zeta u\|_{s+2\varepsilon} + \|\zeta\bar\partial u\|_{s+\varepsilon} \le C\left(\|\zeta' f\|_s + \|\zeta' u\|_{L^2}\right), \qquad (*)$$

under förutsättning att högerledet är ändligt.

I beviset av (*) ersätter vi elliptisk regularisering med följande lokala argument: Först erinrar vi oss att om $\{\phi_\delta\}$ är en slät approximativ enhet på $\mathbb{R}^m$, så gäller uppskattningen $\|v\|_s \sim \sup \|\phi_\delta * v\|_s$, och alltså $v \in H_s(\mathbb{R}^m)$ så snart högerledet sup $\|\phi_\delta * v\|_s$ är ändligt. Så istället för att uppskatta de tangentiella pseudodifferentialoperatorna Λ^t verkande på $\zeta\, u$, där u löser ett regulariserat randvärdesproblem, bevisar vi uppskattningar för operatorerna

$$A_\delta u = \zeta'\, \Lambda^{s+\epsilon}\big(\phi_\delta * \zeta\, u\big)$$

med konstanter som är oberoende av δ. Varje operator A_δ är tangentiellt regulariserande, så vi kan partialintegrera i vanlig ordning.

Denna metod kan tillämpas på områden för vilka $\bar\partial$ inte har sluten bild. Det räcker att X kan bäddas in i någon X' som innehåller ett område $D' \supset D$, sådant att $D \cap U = D' \cap U$ för någon omgivning U av E, och sådant att $\operatorname{Im}\bar\partial$ är sluten på D'. Det följer då att om v är den minimala lösningen till $\bar\partial v = f$ på D, och om vi fortsätter v till en funktion v^0 på D' genom att låta den vara noll utanför D, så gäller att v^0 kan skrivas ϑu och paret $(u\big|_D, f)$ uppfyller nu villkoren för (*). I det fall då $D \Subset \mathbb{C}^n$ och då $\mathcal{O}(D)$ inte kan fortsättas över randstycket E låter vi D' vara holomorfienveloppen till D. Detta innebär att de vanliga subelliptiska uppskattningarna för v nära E är giltiga i detta fall. När $D_0 \subset D$ med $D \cap U = D_0 \cap U$, är vår metod väl lämpad för jämförelser av minimallösningar i D och i D_0, och i situationen ovan är deras differens slät upp till E. En konsekvens av detta är att skillnaden mellan Bergman-kärnorna K_D och K_{D_0} är slät fram till och med diagonalen $\Delta_E = E \times E$. Följaktligen är singulariteterna hos K_D på Δ_E lokalt bestämda. Speciellt gäller de välkända asymptotiska utvecklingarna för Bergman-kärnan, ursprungligen påvisade av Charles Fefferman samt av Louis Boutet de Monvel och Johannes Sjöstrand, vid strikt pseudokonvexa punkter i E.

Peter Ebenfelt

Reella hyperytor i komplexa rummet och deras avbildningar

År 1974 gav Shiing–Shen Chern och Jürgen Moser en fullständig beskrivning av den lokala invarianta geometrin hos reellanalytiska hyperytor i $\mathbb{C}^N$, $N > 1$, vid icke Levi-degenererade punkter, inklusive en fullständig normalform för ytan vid en sådan punkt. (Detta kallas numera för Chern–Mosers normalform.) Ett antal intressanta och viktiga följdsatser beträffande avbildningar mellan sådana hyperytor kan härledas från deras arbete, såsom till exempel Lie-gruppsstrukturen hos stabilitetsgruppen vid en icke Levi-degenererad punkt, och konvergensegenskaper hos formella avbildningar.

För en allmän reallanalytisk CR-mångfald i $\mathbb{C}^N$ (av godtycklig kodimension och utan villkor på Levi-formen) är den lokala geometrin mer komplicerad och ingen motsvarighet till Chern–Mosers normalform är känd. Trots detta kan man bevisa att avbildningar mellan reallanalytiska CR-mångfalder av ändlig typ har många av de egenskaper som avbildningar mellan icke Levi-degenererade hyperytor har, som exempelvis analytisk jetparametrisering (vilket medför Lie-gruppsstruktur hos stabilitetsgruppen) och konvergens av formella avbildningar, under förutsättning att mångfalderna är *holomorft icke-degenererade.* Det senare villkoret är också nödvändigt för att alla avbildningar ska ha sådana egenskaper. Metoderna för att behandla dessa frågor för den allmänna klassen av CR-mångfalder av ändlig typ är helt annorlunda än de som bygger på existensen och entydigheten hos en normalform. Ett grundläggande redskap i studiet är en karakterisering av ändlig typ i termer av dynamiska egenskaper hos mångfaldens Segre-avbildning.

I detta föredrag tar vi upp pågående forskning samt en del gemensamma arbeten med Salah Baouendi och Linda Rothschild.

Litteraturhänvisningar

Salah Baouendi, Peter Ebenfelt & Linda Rothschild Real submanifolds in complex space and their mappings *Princeton Mathematical Series, vol. 47* Princeton University Press, Princeton (1999) xii+404 s.

Salah Baouendi, Peter Ebenfelt & Linda Rothschild Local geometric properties of real submanifolds of complex space *Bulletin of the American Mathematical Society* **37** (2000) 309-336

Jan Boman

Om entydig fortsättning av mikroanalytiska distributioner

Sigurdur Helgasons så kallade stödsats för Radon-transformen säger följande. Antag att $f(x)$ är en funktion på $\mathbb{R}^n$ som avtar i oändligheten snabbare än varje negativ potens av $|x|$ och att dess Radon-transform $Rf(L) = \int_L f\, ds$ försvinner för varje hyperplan L som är disjunkt från en given kompakt, konvex mängd K; då är $f = 0$ i $\mathbb{R}^n \setminus K$. En analog stödsats för generaliserade Radon-transformer $R_\rho f(L) = \int_L f(\cdot)\rho(L,\cdot)\, ds$ för godtycklig reellanalytisk och positiv viktsfunktion $\rho(L,x)$, $x \in L$, gavs av Todd Quinto och mig själv under tilläggsförutsättningen att f har kompakt stöd. Beviset var en lätt konsekvens av två tidigare kända fakta, nämligen en mikrolokal regularitetssats för lösningar till ekvationen $R_\rho f = 0$, och Lars Hörmanders sats om entydig fortsättning för mikrolokalt reellanalytiska distributioner: om $f = 0$ på ena sidan av en hyperyta $S \subset \mathbb{R}^n$ och $(x,\xi) \notin WF_A(f)$ för något $(x,\xi) \in N^*(S)$, så är $f = 0$ i en omgivning av x; här är $N^*(L_0)$ konormalen till L_0 i $T^*(\mathbb{R}^n)$.

I ett senare arbete eliminerade jag förutsättningen att f har kompakt stöd, varigenom Helgasons sats kom att utgöra ett specialfall svarande mot konstant ρ. Metoden var att studera ett ekvivalent problem om Radon-transformer på det reella projektiva rummet $\mathbb{P}^n$. Ett viktigt steg i beviset var följande utsaga. Låt f vara en kontinuerlig funktion på en omgivning av en kompakt reellanalytisk hyperyta i en reellanalytisk mångfald M, och antag (1) att f försvinner av oändlig ordning längs V, och (2) att $WF_A(f) \cap N^*(V) = \varnothing$; då följer att (3) $f = 0$ i någon omgivning av V.

Det är naturligt att fråga sig om en *lokal* motsvarighet till den sistnämnda utsagan också är sann, det vill säga huruvida (1) och (2) implicerar (3) även om V inte förutsätts vara kompakt. Detta visade jag vara sant i en not i *Comptes Rendus*, se nedan. Konsekvenser av denna sats för stödsatser för Radon-transformer gav jag i ett arbete i *Contemporary Mathematics* 1992, och i ett arbete från 1995 publicerat i Kyoto utvidgade jag min ursprungliga lokala sats genom att ersätta den analytiska vågfrontsmängden $WF_A(f)$ med vågfrontsmängden $WF_M(f)$ med avseende på en godtycklig kvasianalytisk Denjoy–Carleman-klass $C(\{M_k\})$, och genom att tillåta f att vara en icke-kvasianalytisk ultradistribution, alltså en linjärform på en icke kvasianalytisk klass av testfunktioner. Genom ett motexempel av Mikio Sato vet man att den lokala satsen inte är sann för hyperfunktioner, och sedemera generaliserade jag Satos motexempel genom att konstruera ett liknande motexempel i en (nästan) godtycklig kvasianalytisk klass av ultradistributioner.

Litteraturhänvisningar

JAN BOMAN A local vanishing theorem for distributions
Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences **315** (1992) 1231-1234

JAN BOMAN Uniqueness and non-uniqueness for microanalytic continuation of ultradistributions *Contemporary Mathematics* **251** (2000) 61-82

Mattias Jonsson

Plurikomplex dynamik II

Hénon-avbildningar: Shmuel Friedland och John Milnor visade 1989 att alla polynomiella automorfier av $\mathbb{C}^2$ med intressant dynamik är (konjugerade med) sammansättningar av så kallade Hénon-avbildningar av typen

$$f(z,w) = \big(p(z) + bw, z\big),$$

där $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_0$ är ett envariabelpolynom och konstanten b är skild från noll. Givet en sådan Hénon-avbildning f införs mängderna

$$K^{\pm} = \big\{z \in \mathbb{C}^2\,;\; f^n z \text{ begränsad då } n \to \pm\infty\big\},$$

och deras snitt $K = K^+ \cap K^-$ som är en kompakt mängd. Man har även de tre Juliamängderna $J^{\pm} = \partial K^{\pm}$ och $J = J^+ \cap J^- = \partial K$. Om p är en fixpunkt (eller mer allmänt en periodisk punkt) för f så måste p ligga i mängden J^- om p är attraherande, i J^+ om p är repellerande och i J om p är en *sadelpunkt.* Genom en sådan sadelpunkt passerar en *stabil mångfald* som ges av $W^s(p) = \big\{z \in \mathbb{C}^2\,;\; f^n z \to p \text{ då } n \to +\infty\big\}$ och en motsvarande instabil mångfald $W^u(p)$ som definieras analogt då $n \to -\infty$.

Man har $W^s(p) \subset J^+$ och $W^u(p) \subset J^-$ och en viktig sats av Eric Bedford och John Smillie säger att $\overline{W^s(p)} = J^+$ och $\overline{W^u(p)} = J^-$. Beviset bygger på pluripotentialteori och positiva strömmar. Till mängderna $K^{\pm}$ hör respektive plurisubharmoniska Greenfunktioner

$$G^{\pm} = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n|,$$

och de positiva slutna strömmarna $\mu^{\pm} = dd^c G^{\pm}$ vars stöd visar sig vara precis Juliamängderna $J^{\pm}$. Produktströmmen $\mu^+ \wedge \mu^-$ definierar ett invariant mått μ med stöd på J, och detta mått kan beskrivas med hjälp av de periodiska sadelpunkterna hos f via formeln $\mu = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \sum_{f^n p = p} \delta_p$.

Litteraturhänvisningar

Eric Bedford & John Smillie Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$; Stable manifolds and recurrence *Journal of the American Mathematical Society* 4 (1991) 657-679

Eric Bedford, Mikhail Lyubich & John Smillie Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ *Inventiones Mathematicae* **114** (1993) 277-288

Mattias Jonsson

Plurikomplex dynamik III

Reguljära polynomavbildningar av $\mathbb{C}^2$: En polynomavbildning $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ av grad d sägs vara *reguljär* om dess homogena del f_h av maximal grad d uppfyller $f_h^{-1}(0) = 0$. Detta är ekvivalent med att f kan fortsättas kontinuerligt (och följaktligen holomorft) till hela projektiva rummet $\mathbb{P}^2$. (Observera att Hénon-avbildningar inte är reguljära i denna mening.) Liksom tidigare inför vi den kompakta mängden

$$K = \{z \in \mathbb{C}^2\,;\ f^n z \text{ begränsad då } n \to \infty\}.$$

Vi låter vidare $\Pi = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ beteckna den projektiva linjen i oändligheten. Om nu A är attraktionsområdet för Π, så har man en invariant uppdelning $\mathbb{P}^2 = K \cup A$.

Adrien Douady och John Hubbard visade omkring 1985 att för ett envariabelpolynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan Julia-mängden $J = \partial K$ effektivt studeras med hjälp av så kallade *externa strålar*, det vill säga gradientlinjer till Green-funktionen för $\mathbb{C} \setminus K$. Vår målsättning är att genomföra motsvarande program i $\mathbb{C}^2$. Vi inför den plurikomplexa Green-funktionen

$$G = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \log^+ |f^n|,$$

och den positiva slutna strömmen $T = dd^c G$. John Erik Fornaess och Nessim Sibony har visat att det invarianta måttet $\mu = T \wedge T$ är ergodiskt. Vi betecknar dess stöd (som ligger i ∂K) med J. Vidare låter vi J_Π beteckna Julia-mängden för den rationella avbildningen $f|_\Pi\colon \Pi \to \Pi$, och motsvarande invarianta mått (med stöd på J_Π) skriver vi μ_Π.

Till $a \in J_\Pi$ hör en stabil mångfald $W^s(a) = \{z \in \mathbb{C}^2\,;\ d(f^n z, f^n a) \to 0, n \to \infty\}$ som eventuellt kan ha singulariteter. Restriktionen $G|_{W^s(a)}$ är harmonisk för nästan alla $a \in J_\Pi$ (med avseende på måttet μ_Π), och vi definierar $\mathcal{E}_a$ som mängden av dess gradientlinjer. Unionen $\mathcal{E} = \bigcup_a \mathcal{E}_a$ utgör alla våra externa strålar, och vi förser $\mathcal{E}$ med måttet $\nu = \mu_\Pi \otimes d\theta/2\pi$. Vi visar sedan att nästan varje (med avseende på ν) stråle $\gamma \in \mathcal{E}$ har en väldefinierad ändpunkt $e(\gamma) \in J$, och att $e_*\nu = \mu$.

Litteraturhänvisning

ERIC BEDFORD & MATTIAS JONSSON Dynamics of regular polynomial endomorphisms of $\mathbb{C}^k$ *American Journal of Mathematics* **122** (2000) 153-212

Ragnar Sigurdsson

Den relativa extremalfunktionen

Om X är en komplex mångfald och E är en delmängd av X, så definieras den *relativa extremalfunktionen* för E i X som

$$u_{E,X} = \sup\{v \in \mathrm{PSH}(X)\,;\ v \leq -\chi_E\},$$

där $\mathrm{PSH}(X)$ betecknar klassen av plurisubharmoniska funktioner på X och χ_E är den karakteristiska funktionen för E. Föreläsningen behandlar en formel för $u_{E,X}$ som bygger på Evgeny Poletskys teori för skivfunktionaler.

En *analytisk skiva* i X är en holomorf avbildning f från enhetsskivan $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ in i X. En analytisk skiva f sägs vara sluten om den kan fortsättas analytiskt till en omgivning av det slutna höljet $\overline{\mathbb{D}}$, medan vi säger att f är begränsad om dess bild $f(\mathbb{D})$ är relativt kompakt i X. Vi låter $\mathcal{A}_X$ och $\mathcal{B}_X$ beteckna mängderna av alla slutna respektive begränsade analytiska skivor i X.

Om X är ett område i $\mathbb{C}^n$ och $f \in \mathcal{B}_X$, så har f icke-tangentiella gränsvärden i nästan alla punkter på enhetscirkeln $\mathbb{T}$ och dessa randvärden definierar en Borel-mätbar funktion $\check{f}\colon \mathbb{T} \to X$. För en öppen delmängd $E \subset X$ gäller den explicita formeln

$$u_{E,X} = -\frac{1}{2\pi}\sup\{\lambda(\check{f}^{-1}(E))\,;\ f \in \mathcal{A}_X,\ f(0) = x\}.$$

Med hjälp av denna formel kan vi bevisa en intressant konvexitetssats för relativa extremalfunktioner. Anta nämligen att X är ett konvext område i $\mathbb{C}^n$, och att $E \subset X$ är en öppen eller kompakt konvex delmängd. Då är subnivåmängden $\{\zeta \in X\,;\ u_{E,X}(\zeta) < \alpha\}$ också konvex för varje $\alpha \in [-1, 0]$.

I beviset för konvexitetssatsen använder vi följande resultat om Blaschke-produkter, som måhända är av intresse i sig själv: Om S_1 och S_2 är Borel-mängder på enhetscirkeln med $\lambda(S_1), \lambda(S_2) > \beta$, så finns det Blaschke-produkter φ_1 och φ_2 som fixerar origo och uppfyller

$$\lambda(\check{\varphi}_1^{-1}(S_1) \cap \check{\varphi}_2^{-1}(S_2)) > \beta.$$

Litteraturhänvisning

FINNUR LÁRUSSON, PATRICE LASSERE & RAGNAR SIGURDSSON Convexity of sublevel sets of plurisubharmonic extremal functions

Annales Polonici Mathematici **68** (1998) 267-273