NORDAN TRE

Grand Hôtel Saltsjöbaden, 22-25 april 1999

Årets Nordan-konferens hölls på anrika Grand Hôtel i Saltsjöbaden. Enligt önskemål från en generös sponsor löd den officiella titeln på evenemanget *"Ett Marcus Wallenberg-symposium över komplex analys i flera variabler"*. Hela femtiofem deltagare hade slutit upp för att i dagarna fyra genom sin medverkan uppmärksamma Christer Kiselmans stundande sextioårsdag. Konferensens första dag avslutades med en gemensam aftonpromenad till Stockholms observatorium, där astronomen Dan Kiselman förevisade teleskopet. Fjorton timslånga föredrag (varav det sista delvis på esperanto) avverkades i en atmosfär av respekt och samförstånd - i sann Saltsjöbadsanda!

DELTAGARE

Leif Abrahamsson (Uppsala)
Lars Alexandersson (Linköping)
Mats Andersson (Göteborg)
Jockum Aniansson (Stockholm)
Jim Arlebrink (Borås)
Ulf Backlund (Umeå)
Eric Bedford (Bloomington)
Ewa Bergqvist (Umeå)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jan Boman (Stockholm)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Hasse Carlsson (Göteborg)
Urban Cegrell (Umeå)
Klas Diederich (Wuppertal)
Pascal Dingoyan (Göteborg)
Julien Duval (Toulouse)
Peter Ebenfelt (Stockholm)
Lars Filipsson (Stockholm)
John Erik Fornaess (Ann Arbor)
Mikael Forsberg (Gävle)
Franc Forstnerič (Madison)
Lawrence Gruman (Toulouse)
Gennadi Henkin (Paris)
Björn Ivarsson (Uppsala)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Robert Juhlin (Stockholm)
Sten Kaijser (Uppsala)
Christer Kiselman (Uppsala)
Maciej Klimek (Uppsala)
Mika Koskenoja (Helsingfors)
Norman Levenberg (Auckland)
Niklas Lindholm (Göteborg)
Jarl Lindrud (Göteborg)
Erik Løw (Oslo)
Per Manne (Bergen)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Petersson (Växjö)
Wiesław Pleśniak (Krakow)
Juhani Riihentaus (Joensuu)
Hans Rullgård (Stockholm)
Timur Sadykov (Stockholm)
Sebastian Sandberg (Göteborg)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Józef Siciak (Krakow)
Ragnar Sigurdsson (Sundsvall)
Daniele Struppa (Fairfax)
Jean–Marie Trépreau (Paris)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Jonas Wiklund (Umeå)
Frank Wikström (Umeå)
Yang Xing (Umeå)
Hiroshi Yamaguchi (Otsu)
Per Åhag (Sundsvall)
Ozan Öktem (Stockholm)
Nils Øvrelid (Oslo)

[55 personer]

PROGRAM

Torsdag 22 april

15.02-16.00 Urban Cegrell *A general definition of the complex Monge–Ampère operator*
16.15-17.15 Daniele Struppa *Algebraic analysis of the Cauchy–Fueter–Dirac operator: New results and open questions*

Fredag 23 april

09.30-10.30 Gennadi Henkin *The $\bar{\partial}$ equation on singular varieties and projective embeddings of pseudoconcave surfaces*
11.00-12.00 Julien Duval *Examples of hyperbolic sets in* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
14.00-15.00 Eric Bedford *From the three body problem to the complex horseshoe*
15.30-16.30 Franc Forstnerič *Automorphisms and embeddings in complex affine spaces*
16.45-17.45 Jean–Marie Trépreau *The Schwarz reflection and the conformal nonequivalence of formally equivalent objects in* $\mathbb{C}$

Lördag 24 april

09.30-10.30 Klas Diederich *The pluricomplex Green function: estimates and applications*
11.00-12.00 Hiroshi Yamaguchi *Variation of the Bergman metric on Riemann surfaces*
14.00-15.00 Józef Siciak *Analyticity and separate analyticity with respect to polynomial classes*
15.30-16.30 Lawrence Gruman *Nevanlinna type estimates for holomorphic mappings*
16.45-17.45 John Erik Fornaess *Convex domains of finite type*

Söndag 25 april

09.30-10.30 August Tsikh *Toric residues*
11.00-12.00 Mikael Passare *Amoebas and Laurent series*

ARRANGÖRER

Björn Ivarsson, Burglind Juhl–Jöricke och Maciej Klimek

FINANSIÄRER

Marcus Wallenbergs stiftelse för internationellt vetenskapligt samarbete
Uppsala universitet

Urban Cegrell

En generell definition av den komplexa Monge–Ampère-operatorn

Inom pluripotentialteorin spelar den komplexa Monge–Ampère-operatorn MA en roll liknande den som Laplace-operatorn Δ spelar i klassisk potentialteori. Laplace-operatorn är en linjär andra ordningens differentialoperator och därför definierad på alla distributioner. Den komplexa Monge–Ampère-operatorn är däremot icke-linjär och det finns exempel konstruerade av bland andra Christer Kiselman och Alan Taylor som visar att den inte kan definieras på mängden av alla plurisubharmoniska funktioner. Avsikten med detta föredrag är att definiera en klass av plurisubharmoniska funktioner som är den största möjliga definitionsmängden för Monge–Ampère-operatorn.

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ vara ett begränsat sammanhängande område, och beteckna med $PSH(\Omega)$ mängden av plurisubharmoniska funktioner på Ω. Taylor visade i sina epokgörande arbeten med Eric Bedford att MA kan utvidgas till alla lokalt begränsade funktioner i $PSH(\Omega)$, och något senare bevisade Jean-Pierre Demailly och Nessim Sibony att det även går bra om funktionerna tillhör $L^\infty(\Omega \setminus K)$ för någon kompakt delmängd K. Vi kommer att anta att området Ω är *hyperkonvext*, det vill säga att det existerar en negativ funktion i $PSH(\Omega)$ vars alla subnivåmängder är relativt kompakta i Ω.

Ett viktigt verktyg utgörs av följande approximationsresultat: Varje negativ funktion $u \in PSH(\Omega)$ kan approximeras med en avtagande följd av funktioner $u_j \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, som går punktvis mot u, med egenskapen att alla u_j är noll på randen $\partial\Omega$ och har ändlig Monge–Ampère-massa på Ω.

Vi låter $\mathcal{E}_0(\Omega)$ beteckna den konvexa konen bestående av alla $\varphi \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ med ändlig Monge–Ampère-massa sådana att $\lim_{z \to \xi} \varphi(z) = 0$ för alla randpunkter $\xi \in \partial\Omega$. Sedan säger vi att en plurisubharmonisk funktion u tillhör klassen $\mathcal{E}(\Omega)$ om det för varje punkt $z_0 \in \Omega$ finns en avtagande följd av funktioner $u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ med ändlig Monge–Ampère-massa som konvergerar mot u i en omgivning av z_0.

Betrakta nu allmänt en klass $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Omega)$ av negativa plurisubharmoniska funktioner på Ω med följande två egenskaper:

(1) Om $u \in \mathcal{K}$ och $0 \geq v \in PSH(\Omega)$ så gäller $\max(u, v) \in \mathcal{K}$.

(2) Om $u \in \mathcal{K}$ och $0 \geq \varphi_j \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ med $\varphi_j \searrow u$ så är följden $(dd^c\varphi_j)^n$ svagt *-konvergent.

Klassen $\mathcal{E}$ uppfyller egenskaperna (1) och (2), och omvänt, varje klass $\mathcal{K}$ som uppfyller dessa båda egenskaper är innehållen i $\mathcal{E}$.

Litteraturhänvisning

URBAN CEGRELL The general definition of the complex Monge–Ampère operator
Annales de l'Institut Fourier **54** (2004) 163-184

Daniele Struppa

Algebraisk analys av Cauchy–Fueter–Dirac-operatorn: nya resultat och öppna problem

En klassisk sats av Friedrich Hartogs säger att en holomorf funktion i $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, inte kan ha en kompakt singularitetsmängd. I ett arbete från 1988 visade Donato Pertici att Hartogs fenomen också gäller för vänsterreguljära funktioner av flera kvaternionvariabler. Låt $\mathbb{H}^n$ beteckna rummet av kvaternionvektorer $q = (q_1, \ldots, q_n)$, där varje komponent q_i är en kvaternion som vi identifierar med de fyra reella variablerna $(\xi_{i0}, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3})$. En slät funktion $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ kallas vänsterreguljär om den uppfyller Cauchy–Fueters ekvationer $\partial f/\partial \bar{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, vilka utskrivna i reell form blir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial \xi_{i0}} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_{i1}} - \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_{i2}} - \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_{i3}} & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_0}{\partial \xi_{i1}} + \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_{i0}} - \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_{i3}} + \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_{i2}} & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_0}{\partial \xi_{i2}} + \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_{i3}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_{i0}} - \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_{i1}} & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_0}{\partial \xi_{i3}} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_{i2}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_{i1}} + \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_{i0}} & = 0\,. \end{cases}$$

Genom att studera fria upplösningar av Cauchy–Fueter-komplexet kan vi ge ett algebraiskt bevis, i Leon Ehrenpreis anda, av Perticis sats: *"Om $K \subset \mathbb{H}^n$, $n > 1$, är en kompakt mängd med sammanhängande komplement, och om f är en vänsterreguljär funktion på $\mathbb{H}^n \setminus K$, så kan f entydigt fortsättas till en hel vänsterreguljär funktion."*

Efter Fourier-transformering av Cauchy–Fueter-systemet ovan leds man till att betrakta matrisen $A_n = [U_1\ U_2\ \cdots\ U_n]$, där varje U_i betecknar en kvadratisk matris:

$$U_i = \begin{bmatrix} x_{i0} & x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \\ -x_{i1} & x_{i0} & x_{i3} & -x_{i2} \\ -x_{i2} & -x_{i3} & x_{i0} & x_{i1} \\ -x_{i3} & x_{i2} & -x_{i1} & x_{i0} \end{bmatrix}.$$

Vi låter R symbolisera polynomringen i de $4n$ duala variablerna x_{ij}, medan $\langle A_n \rangle$ står för R-modulen genererad av kolonnerna hos A_n. Vi bevisar, med hjälp av Gröbner-baser, att den projektiva dimensionen hos R-modulen $R^4/\langle A_n \rangle$ är lika med $2n - 1$.

Litteraturhänvisning

WILLIAM ADAMS, PHILIPPE LOUSTAUNAU, VICTOR PALAMODOV & DANIELE STRUPPA
Hartogs' phenomenon for polyregular functions and projective dimension of related modules over a polynomial ring *Annales de l'Institut Fourier* **47** (1997) 623-640

Gennadi Henkin

$\bar\partial$-ekvationen på singulära varietéer och projektiva inbäddningar av pseudokonkava ytor

Det är ett klassiskt problem att försöka bädda in abstrakta komplexa mångfalder i konkreta affina eller projektiva rum. Att konstruera en inbäddning $X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ är ekvivalent med att finna många globala holomorfa funktioner på X som separerar punkter, medan det för en inbäddning $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ gäller att hitta meromorfa funktioner med samma egenskap. Klassiska satser av Kunihiko Kodaira (1954) och Reinhold Remmert (1956) behandlar inbäddningsproblemet för kompakta mångfalder respektive Stein-mångfalder.

Låt M beteckna en slät kompakt, strängt pseudokonvex CR-mångfald av reell dimension $2k-1$. Vi säger att M är *utfyllbar* om M kan realiseras som randen till ett k-dimensionellt Stein-rum. Vi begränsar oss här till fallet $k=2$. Det är känt att M är utfyllbar om och endast om M kan inbäddas i ett affint komplext rum via en CR-avbildning. Detta villkor är i allmänhet inte uppfyllt.

Det följer från resultat av Laszlo Lempert att om en strängt pseudokonvex, kompakt 3-dimensionell CR-mångfald M utgör randen till en strängt pseudokonvex yta X_+, då är den omvända mångfalden $-M$ randen till en strängt pseudokonkav komplex yta X_- som innehåller en slät holomorf kurva Z med positivt normalknippe N_Z.

Låt oss nu anta att CR-mångfalden M uppfyller detta senare villkor, det vill säga att $-M$ utgör randen till en strikt pseudokonkav komplex yta X_- innehållande en slät positivt inbäddad kompakt kurva Z. Då kan vi bland annat visa följande:

(1) Inbäddbarheten hos M i det affina komplexa rummet är ekvivalent med att X_-, eller en lämplig omgivning av Z inuti X_-, är inbäddbar i det projektiva komplexa rummet.

(2) Dessa inbäddningsegenskaper bevaras vid konvergenta gränsvärdesprocesser i C^∞-topologin, under förutsättning att vissa kohomologivillkor är uppfyllda.

Litteraturhänvisning

Charles Epstein & Gennadi Henkin Stability of embeddings for pseudoconcave surfaces and their boundaries *Acta Mathematica* **185** (2000) 161-237

Julien Duval

Exempel på hyperboliska mängder i $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

En komplex mångfald i projektiva rummet $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sägs vara hyperbolisk om den inte innehåller någon icke-konstant hel analytisk kurva. Det existerar med andra ord ingen icke-konstant holomorf avbildning från $\mathbb{C}$ in i den givna mångfalden. Enligt Picards sats är Riemann-sfären minus tre punkter hyperbolisk och andra grundläggande exempel är, i ljuset av Liouvilles sats, alla öppna begränsade områden i $\mathbb{C}^n$.

En förmodan av Shoshichi Kobayashi säger att komplementet till en generisk hyperyta av grad minst $2n+1$ i $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ är hyperboliskt. Vi ska titta närmare på två fall där sådana komplement bevisats vara hyperboliska, nämligen:

(1) Komplementet till unionen av $2n+1$ hyperplan i allmän positition i $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ är hyperboliskt. (Bevisat av Mark Green.)

(2) Komplementet i $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ till en generisk kurva av grad ≥ 5 bestående av tre komponenter är hyperboliskt. (Visat för kägelsnitt av Hans Grauert, och allmänt under förutsättning att ingen komponent är en linje av Gerd Dethloff, Georg Schumacher och Pit-Mann Wong).

Vi presenterar nya, mer direkta bevis för hyperboliciteten av dessa mängder genom att använda oss av idéer hämtade från ett nytt, enkelt och "dynamiskt" bevis för Picards sats av Antonio Ros. Dennes bevis bygger i sin tur på följande lemma av Lawrence Zalcman och Robert Brody: Om $f_k\colon D \to X$ är en följd holomorfa avbildningar från enhetsskivan in i en kompakt komplex mångfald X sådan att $||f_n'(0)|| \to \infty$, så finns parametriseringar r_n av $\mathbb{C}$ med egenskapen att (en delföljd av) den omparametriserade följden $f_n \circ r_n$ konvergerar mot en hel, icke-konstant avbildning $\phi\colon \mathbb{C} \to X$. Detta lemma kan också användas för att visa att våra hyperboliska mångfalder dessutom är Kobayashi-hyperboliska.

Litteraturhänvisning

François Berteloot & Julien Duval Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires *L'Enseignement Mathématique* **47** (2001) 253-267

Eric Bedford

Från 3-kropparsproblemet till den komplexa hästskon

Till de klassiska frågeställningarna inom teorin för dynamiska system hör 3-kropparsproblemet, det vill säga att beskriva rörelserna hos tre punktmassor under inverkan enbart av deras ömsesidiga gravitation. Man vill till exempel veta om solen, jorden och månen utgör ett system med stabila banor. Problemet är fortfarande olöst, men en viktig insats för vår förståelse av 3-kropparsproblemet gjordes av Henri Poincaré i det arbete som 1889 gav honom segern i den pristävling som utlysts av den svenske kungen Oscar II. En av Poincarés geniala idéer var att införa ett plan Π transversellt mot banorna och sedan studera hur en punkt $p \in \Pi$ som rör sig ett varv längs en bana förflyttas till en ny skärningspunkt $p' \in \Pi$. Den inducerade avbildningen $f\colon \Pi \to \Pi$, given av $f(p) = p'$, kallas numera för det dynamiska systemets *Poincaré-avbildning*. På detta sätt överförs studiet av det ursprungliga kontinuerliga systemet till ett diskret problem rörande iterationer av avbildningar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Stephen Smales berömda hästskoavbildning visar att även en strukturellt stabil diffeomorfi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan ha ett komplicerat dynamiskt uppförande. Vi ska diskutera hur hästskofenomenet uppträder i en explicit 2-parameter familj av diffeomorfier på $\mathbb{R}^2$, den så kallade Hénon-familjen:

$$f_{ab}(x, y) = (a - by - x^2, x), \quad b \neq 0.$$

För en given avbildning $f = f_{ab}$ låter vi $K \subset \mathbb{R}^2$ beteckna mängden av punkter med begränsade banor. Vi säger att f är en hyperbolisk hästsko om K är en hyperbolisk mängd för f och om restriktionen av f till K är topologiskt konjugerad med ett fullständigt 2-skift. Låt $\mathcal{H}$ beteckna mängden av parametrar (a, b) med $b \neq 0$ för vilka f_{ab} är en hyperbolisk hästsko. Mängden $\mathcal{H}$ är öppen och icke-tom.

Vi låter $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ beteckna den n:te iterationen av f och vi skriver $\lambda^{\pm}(p)$, med $|\lambda^-(p)| \leq |\lambda^+(p)|$, för egenvärdena till derivatan Df^n i punkten p. Ett av våra resultat kan nu formuleras på följande vis:

Sats: *Låt $f = f_{ab}$ med (a, b) i slutna höljet av $\mathcal{H}$ och $b \neq 0$.*
(1) Den itererade avbildningen f^n har 2^n fixpunkter och de är alla sadelpunkter.
(2) Om p är en periodisk punkt för f med period n, så gäller $|\lambda^-(p)| \leq 2^{-n}$; $|\lambda^+(p)| \geq 2^{-n}$.

Beviset bygger på ett studium av den komplexifierade avbildningen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Eftersom hästskon har maximal entropi ger resultat om den komplexa dynamiken även information om den reella avbildningen. Vi har tidigare visat att reella polynomavbildningar av maximal entropi är vad vi kallar kvasihyperboliska.

Litteraturhänvisningar

ERIC BEDFORD AND JOHN SMILLIE Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies *Annals of Mathematics* **160** (2004)

ERIC BEDFORD AND JOHN SMILLIE Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: Quasi-Expansion *American Journal of Mathematics* **124** (2002) 221-271

Franc Forstnerič

Automorfier och inbäddningar i komplexa affina rum

Inbäddningsproblemet består i att, givet en Stein-mångfald X, konstruera en proper holomorf inbäddning $F : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$, med så låg dimension N som möjligt. Man kan också fråga efter relativa inbäddningar: givet en inbäddning av en komplex delmångfald av X, går det att utvidga den till en inbäddning av hela X? Det kan dessutom vara av intresse att konstruera inbäddningar med särskilda egenskaper, liksom att ställa motsvarande problem för immersioner. Detta föredrag handlar om såväl klassiska som nya resultat i dessa ämnen, liksom en del öppna frågor.

Inbäddningsproblemet har studerats i många decennier och efter en lång kedja av resultat är det nu klarlagt att varje Stein-mångfald X av dimension $n \geq 2$ kan inbäddas i $\mathbb{C}^N$ med $N = [3n/2] + 1$. Det finns dessutom exempel som visar att denna dimension är den bästa möjliga. De sista länkarna i den här kedjan av resultat är arbeten av Yakov Eliashberg och Mikhael Gromov (1992) samt av Jörg Schürmann (1997).

En väsentlig ingrediens i beviset av de optimala inbäddningssatserna är Gromovs så kallade homotopiprincip från 1989. När vi tillsammans med Jasna Prezelj läste Gromovs urprungliga bevis kunde vi inte fullt genomföra de argument som där föreslås på grund av till synes icke-triviala analytiska och geometriska problem. Istället valde vi att komplettera beviset på ett något annorlunda sätt. Den version av homotopiprincipen som behövs för inbäddningssatsen kan formuleras på följande sätt: Låt $\pi: V \to X$ vara ett holomorft vektorknippe av rang ≥ 2 över en Stein-mångfald X och beteckna med $\bar{\pi}: \bar{V} \to X$ motsvarande projektiva knippe. Låt vidare $\Sigma \subset V$ vara en sluten komplex delvarieté sådan att varje fiber $\Sigma_x \subset V_x$ har komplex kodimension ≥ 2 och tillslutningen av Σ i $\bar{V}$ inte innehåller hyperplanet i oändligheten i någon fiber. Om då X_0 är en sluten komplex delvarieté av X och om $f_0: X \to V \setminus \Sigma$ är en kontinuerlig sektion som är holomorf nära X_0, så finns för varje $k \in \mathbb{N}$ en homotopi $f_t: X \to V \setminus \Sigma$ som är fix av ordning k på X_0 och sådan att f_1 är holomorf på X.

Litteraturhänvisning

FRANC FORSTNERIČ & JASNA PREZELJ Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays *Mathematische Annalen* **317** (2000) 117-154

Jean–Marie Trépreau

Schwarz-reflektion och konform icke-ekvivalens mellan formellt ekvivalenta objekt i $\mathbb{C}$

Låt $\mathbf{H}$ beteckna gruppen (under operationen $\circ$) av konvergenta biholomorfa groddar

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad a_1 \neq 0 ,$$

och beteckna med $\hat{\mathbf{H}}$ den större gruppen bestående av motsvarande formella potensserier. Två gruppelement f och g sägs vara formellt konjugerade med varandra om $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ för något $\phi \in \hat{\mathbf{H}}$. Om motsvarande gäller för något $\phi \in \mathbf{H}$ så säger man att f och g är analytiskt konjugerade. Koefficienten a_1 är invariant under formell konjugering, och om $|a_1| \neq 1$ så är f analytiskt konjugerad med sin linjära term $a_1 z$. I fallet då a_1 är en enhetsrot gavs år 1981 en analytisk klassificering av Jean Écalle och Sergey Voronin, oberoende av varandra. Om exempelvis $a_1 = 1$ så är a_3/a_2^2 den enda formella invarianten, medan varje formell konjugatklass sönderfaller i ett oändligt antal analytiska sidoklasser som Écalle och Voronin beskrev i termer av en funktionalinvariant.

Många problem rörande formell och analytisk klassificering kan reduceras till studiet av Écalle–Voronins invarianter, men dessa är (i allmänhet) svåra att praktiskt beräkna, och det är av intresse att finna mer konkreta exempel på formellt ekvivalenta objekt som inte är analytiskt ekvivalenta. Vi beskriver ett sådant exempel här.

Låt E beteckna ellipsen med ekvation

$$z\bar{z} - \frac{a}{2}(z^2 + \bar{z}^2) - 1 = 0, \quad 0 < a < 1.$$

Schwarz-speglingen i kurvan E ges av den (tvåvärda) funktionen $\zeta = F(z)$ som löser ekvationen

$$a\zeta^2 - 2\bar{z}\zeta + (a\bar{z}^2 + 2) = 0 .$$

Man ser enkelt att $F(z) \to \infty$ då $z \to \infty$. I själva verket är det så att om en tangentlinje L till ellipsen E speglas i E så blir bilden en fjärdegradskurva, bestående av två irreducibla komponenter som var och en är en slät reellanalytisk kurva med en asymptot. Detta står i bjärt kontrast till fallet då E är en cirkel (svarande mot $a = 0$). Då $a \to 0$ övergår den ena av dessa kurvor till unionen av en cirkel (som är spegelbilden av L i enhetscirkeln) och *en linje*. Dessa observationer leder till ett enkelt bevis för följande sats: Om en grodd f avbildar ett elliptiskt bågstycke på en cirkelbåge, och tangenten på tangenten, så är ellipsen en cirkel och f är en Möbiusavbildning.

Litteraturhänvisning

JEAN–MARIE TRÉPREAU Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz *Astérisque* **284** (2003) 271-319

Klas Diederich

Den plurikomplexa Green-funktionen: uppskattningar och tillämpningar

Låt D vara ett begränsat hyperkonvext område i $\mathbb{C}^n$ och låt $G(z,w)$ vara den plurikomplexa Green-funktionen på D med pol i w. Det är intressant att studera hur G förändras när polen w närmar sig randen. Enligt ett resultat av Gregor Herbort gäller till exempel att om D har en begränsad Hölder-kontinuerlig plurisubharmonisk uttömningsfunktion så är

$$\lim_{w \to w_0} \inf_{z \in K} G(z,w) = 0$$

för varje $w_0 \in \partial D$ och varje kompakt mängd $K \subset D$. Här presenteras en kvantitativ version av detta resultat, som visar sig praktisk för tillämpningar.

Antag att det begränsade pseudokonvexa området $D \subset \mathbb{C}^n$ har en begränsad plurisubharmonisk uttömningsfunktion $\rho : D \to [-1, 0)$ sådan att för något α, med $0 < \alpha < 1$, och ett par positiva konstanter C_1 och C_2, olikheterna

$$C_1 \operatorname{dist}(z, \partial D)^\alpha \leq |\rho(z)| \leq C_2 \operatorname{dist}(z, \partial D)^\alpha$$

är uppfyllda i hela området D. För varje tillräckligt litet $t > 0$ finns då en konstant C sådan att, om K är kompakt i D och $\operatorname{dist}(w, \partial D) < C^{-1}\mathrm{dist}(\mathrm{K}, \partial\mathrm{D})$, så gäller att

$$\sup_{z \in K} |G(z,w)| \leq C[A(w,K) + \operatorname{dist}(w, \partial D)^{t\alpha} |\log \operatorname{dist}(w, \partial D)|],$$

där $A(w,K)$ är en explicit given term som är jämförelsevis liten när $w \to \partial D$.

Från detta resultat kan man sedan härleda uppskattningar av subnivåmängderna till den plurikomplexa Green-funktionen, vilka i sin tur ger bra uppskattningar av Bergman-kärnan.

Litteraturhänvisning

Klas Diederich & Gregor Herbort Quantitative estimates for the Green function and an application to the Bergman metric
Annales de l'Institut Fourier **50** (2000) 1205-1228

Hiroshi Yamaguchi

Variation av Bergman-metriken på Riemann-ytor

Vi studerar hur Bergman-metriken $K(t,z)|dz|^2$ på en Riemann-yta $R(t)$ varierar med den komplexa parametern $t \in \mathbb{C}$. Den precisa situationen är som följer. Vi utgår från en trippel $(\mathcal{R}, \pi, B)$ där $\mathcal{R}$ betecknar en komplex tvådimensionell mångfald, $B \subset \mathbb{C}$ är en cirkelskiva med centrum i origo, och $\pi\colon \mathcal{R} \to B$ är en holomorf projektion sådan att varje fiber $R(t) = \pi^{-1}(t)$ är en icke-singulär delmångfald i $\mathcal{R}$. Vi betraktar $\mathcal{R} : t \mapsto R(t)$ som en variation av Riemann-ytor och säger nu att variationen är funktionsteoretisk om antingen varje fiber $R(t)$ är en kompakt Riemann-yta eller om det totala rummet $\mathcal{R}$ är en Stein-mångfald.

Givet en trippel $(\mathcal{R}, \pi, B)$ kan vi för varje punkt $p_0 \in \mathcal{R}$ finna en lokal parameter (t,z) i en omgivning $B_0 \times V \ni p_0$, där $B_0 = \{\,|t - \pi(p_0)| < \rho\}$ och $V = \{\,|z| < r\,\}$, så att p_0 motsvaras av $(\pi(p_0), 0)$ och V är en lokal parameter i varje Riemann-yta $R(t)$, för $t \in B_0$. Vi kallar en sådan bidisk $B_0 \times V$ för en π-lokal parameter i $\mathcal{R}$. Längs varje fiber $R(t)$ har vi nu en Bergman-metrik $K(t,z)|dz|^2$ (som eventuellt kan vara $\equiv 0$). Vi säger att funktionen $\log K(t,z)$ är plurisubharmonisk om dess restriktion till varje π-lokal parameter är plurisubharmonisk.

Vi presenterar här två nya satser. Först visar vi att om variationen $\mathcal{R}$ är funktionsteoretisk så är funktionen $\log K(t,z)$ plurisubharmonisk på $\mathcal{R}$. Vårt andra resultat har att göra med holomorfa sektioner av $\mathcal{R}$ över B, det vill säga holomorfa avbildningar $\alpha\colon B \to \mathcal{R}$ sådana att $\pi \circ \alpha = \mathrm{id}_B$. Vi säger att $\log K(t,z)$ är harmonisk längs α om envariabelfunktionen $\log K(t, \alpha(t))$ är harmonisk i B. Om en trippel är holomorft trivial, alltså holomorft ekvivalent med ett produktrum, så finns det oändligt många holomorfa sektioner α sådana att $\log K(t,z)$ är harmonisk längs α. Omvänt kan vi bevisa att om $\mathcal{R}$ är en Stein-mångfald och om trippeln $(\mathcal{R}, \pi, B)$ är topologiskt trivial så medför existensen av en enda holomorf sektion α, längs vilken $\log K(t,z)$ är harmonisk, att $(\mathcal{R}, \pi, B)$ också är holomorft trivial.

Litteraturhänvisning

FUMIO MAITANI & HIROSHI YAMAGUCHI Rigidity of surfaces in relation to the harmonic variation the Bergman metric (på japanska)
Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1067** (1998) 1-14

Józef Siciak

Analyticitet och separatanalyticitet med avseende på polynomklasser

Vi säger att ett linjärt delrum Π i rummet $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ av polynom i n komplexa variabler är en *polynomklass*, om Π är invariant med avseende på gruppen av alla affina automorfier $z \to a + \lambda z$ av $\mathbb{C}^n$, där $a \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Låt $Q_1, \ldots, Q_s$ vara homogena polynom i n variabler med konstanta koefficienter. Då är det invarianta delrummet

$$\Pi = \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) ; \; Q_j [\frac{\partial}{\partial z}] p(z) \equiv 0 , \quad j = 1, \ldots , s \}$$

ett viktigt exempel på en polynomklass. Genom att specificera polynomen Q_j kan man på detta sätt få exempelvis klassen av alla holomorfa, harmoniska, polyharmoniska eller pluriharmoniska polynom, liksom även klassen av polynomlösningar till elliptiska differentialekvationer, och så vidare.

Givet en öppen delmängd $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ säger vi att en funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ är Π-*holomorf* i Ω om för varje $a \in \Omega$ och varje $j \geq 0$ den homogena delen

$$\hat{f}_j(a ; z) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (z - a)^\alpha$$

i Taylor-utvecklingen av f kring a är ett element i klassen Π. Man kan visa att mängden $\mathcal{O}(\Omega, \Pi)$ av alla Π-holomorfa funktioner i Ω är ett Fréchet-rum (i topologin som ges av lokalt likformig konvergens) som är slutet med avseende på partiell derivering.

Låt Π^1 och Π^2 vara polynomklasser på $\mathbb{C}^{n_1}$ respektive $\mathbb{C}^{n_2}$, och låt E_j vara en kompakt delmängd av ett område $D_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ för $j = 1, 2$. Anta vidare att E_j i var och en av sina punkter uppfyller polynomvillkoret (L) med avseende på Π^j. Inför slutligen den sammansatta mängden $X := E_1 \times D_2 \cup D_1 \times E_2$. (Villkoret (L) finns beskrivet i mitt arbete om extremalfunktioner från 1982.) Vårt huvudresultat kan nu formuleras på följande vis.

Det existerar en öppen omgivning $\tilde{X}$ till X sådan att varje funktion f som är separat (Π^1, Π^2)-holomorf på X (det vill säga att $f(z_1, \cdot) \in \mathcal{O}(D_2, \Pi^2)$ för alla $z_1 \in E_1$, och $f(\cdot, z_2) \in \mathcal{O}(D_1, \Pi^1)$ för alla $z_2 \in E_2$) har en unik analytisk fortsättning $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{X}; \Pi^1 \otimes \Pi^2)$. Här betecknar $\Pi^1 \otimes \Pi^2$ den polynomklass på $\mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$ som ges av det linjära höljet av mängden $\{ p(z_1) q(z_2) ; \; p \in \Pi^1, \; q \in \Pi^2 \}$.

Tillämpningar av detta allmänna resultat på speciella polynomklasser ger upphov till en allmän metod, väsentligen baserad på Lagranges interpolationsformel med noder i extrempunkterna hos en kompakt mängd med avseende på en polynomklass, för att bevisa en rad olika resultat som tidigare erhållits av andra matematiker, exempelvis den nyligen publicerade satsen av Jean-Marc Hécart för fallet med lösningar till elliptiska partiella differentialekvationer.

Litteraturhänvisningar

JEAN-MARC HÉCART Fonctions séparément solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique *Doktorsavhandling, Université Paul Sabatier, Toulouse* (1998)

JÓZEF SICIAK Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$ *Annales Polonici Mathematici* **39** (1982) 175-211

Lawrence Gruman

Uppskattningar av Nevanlinna-typ för holomorfa avbildningar

Detta föredrag behandlar nya och gamla resultat om värdefördelning hos icke-degenererade holomorfa avbildningar $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Givet en familj $\mathcal{F}$ av sådana avbildningar säger vi att en mängd $E \subset \mathbb{C}^n$ är *oundviklig* för $\mathcal{F}$ om snittet $F(\mathbb{C}^n) \cap E$ är icke-tomt för varje element $F \in \mathcal{F}$. Vi kommer att huvudsakligen att betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{ F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \,;\ |J_F| \equiv \text{konstant} \},$$

där J_F betecknar jakobianen för avbildningen F.

Det är sedan tidigare känt att om mängden E har en viss asymptotisk densitet i oändligheten, till exempel om E uppfyller villkoret

$$(*) \quad \forall s > 2n \; \exists C_s > 0 \quad \text{så att} \quad z \in B(0,m) \setminus B(0,m-1) \implies \operatorname{dist}(z,E) \le C_s/m^{(s-1)},$$

så är E en oundviklig mängd för $\mathcal{F}$. Här betyder $B(0,r)$ det euklidiska klotet med centrum i origo och radie r.

Min elev Myriam Ounaies har nyligen lyckats uppnå förbättrade uppskattningar av Nevanlinna-typ för mängder E som uppfyller villkoret $(*)$. För varje avbildning $F \in \mathcal{F}$ inför vi funktionen

$$T_F(r) = \int_{B(0,r)} (r^2 - ||z||^2)\, ||F||^{2n(s-1)}\, d\lambda(z),$$

där $||\cdot||$ är den euklidiska normen och $d\lambda$ är det $2n$-dimensionella Lebesgue-måttet. Ett av Ounaies huvudresultat kan formuleras på följande sätt: För $s > 2n$ och E som i $(*)$ gäller olikheten

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{T_F(r)} \int_0^r (r^2 - t^2)\, \operatorname{card}\big(F^{-1}(E) \cap B(0,t)\big)\, dt > 0 .$$

Litteraturhänvisningar

Lawrence Gruman L'image d'une application holomorphe
Annales de la Faculté des Sciences Toulouse Mathématiques **12** (1991) 75-100

Myriam Ounaies Estimations du type Nevanlinna pour les applications non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **26** (1998) 737-748

John Erik Fornaess

Konvexa områden av ändlig typ

I samband med konstruktioner av integralkärnor för att lösa $\bar{\partial}$-ekvationen i ett område D är det av stor betydelse att man kan hitta stödytor till randen ∂D med hög grad av kontakt. Detta låter sig enkelt göras för strängt (pseudo-)konvexa områden, men problemet blir genast mer subtilt om randen har platta punkter.

Låt $D \subset \mathbb{C}^n$ vara ett begränsat konvext område med slät rand. Vi kommer att anta att D är av ändlig typ, det vill säga att det finns ett naturligt tal m sådant att för varje randpunkt $p \in \partial D$ gäller att kontaktgraden för tangentplanet i punkten p är högst lika med m. I detta föredrag, som presenterar ett gemensamt arbete med Klas Diederich, kommer vi att i detalj gå igenom konstruktionen av en familj av släta stödjande hyperytor till D med optimal grad av kontakt i alla reella riktningar.

En av utgångspunkterna för vår konstruktion är följande kända uppskattning av Joaquim Bruna, Alexander Nagel och Stephen Wainger från 1988: Om det reella polynomet $P(x) = \sum_{j=2}^{m} a_j x^j$ är en konvex funktion på intervallet $[0,1]$ så gäller att

$$P(x) \geq c_m \sum_{j=2}^{m} |a_j||x^j|, \qquad x \in [0,1].$$

Pikfunktionerna som hör till de stödytor vi konstruerar kan bland annat användas för att hitta integralkärnor som löser $\bar{\partial}$-ekvationen med bästa möjliga Hölder-uppskattningar.

Litteraturhänvisningar

KLAS DIEDERICH & JOHN ERIK FORNAESS Support functions for convex domains of finite type *Mathematische Zeitschrift* **230** (1999) 145-164

KLAS DIEDERICH, BERT FISCHER & JOHN ERIK FORNAESS Hölder estimates on convex domains of finite type *Mathematische Zeitschrift* **232** (1999) 43-61

August Tsikh

Toriska residyer

I ett arbete från 1978 påpekade James Carrell att summan av lokala residyer med avseende på ett system av n divisorer på en n-dimensionell kompakt komplex mångfald $\mathbb{X}$ kan framställas som en integral över $\mathbb{X}$, och i många fall representerar en sådan integral den topologiska laddningen hos en instanton. En särskilt gynnsam situation för studiet av dessa integraler föreligger då globala homogena koordinater kan införas på $\mathbb{X}$. Så införde David Cox år 1996 begreppet torisk residy på en torisk mångfald. Målet med denna föreläsning är att vidareutveckla Cox synsätt. Vi låter $\mathbb{Y}$ beteckna en d-dimensionell kompakt torisk mångfald med den affina ("ändliga") delen $U \simeq \mathbb{C}^d$; komplementet $\mathbb{Y} \setminus U = \mathbb{Y}_\infty$ utgörs då av en union $\bigcup \mathbb{Y}_j$ av av toriska delmångfalder av dimension $d-1$; snittet $\bigcap \mathbb{Y}_j$ kallar vi skelettet av "oändligheten" $\mathbb{Y}_\infty$ och vi betecknar det med $S_\infty(\mathbb{Y})$.

Vi utnyttjar följande geometriska sats: För varje kompakt torisk mångfald $\mathbb{X}^n$ finns en kompakt torisk mångfald $\mathbb{Y}^d$ och en isomorfi $\varphi\colon \mathbb{X}^n \to S_\infty(\mathbb{Y})$. Mer precist har man en verkan av gruppen $G \simeq \mathbb{C}_*^{d-n}$ på $\mathbb{Y}^d$, och en undantagsmängd $Z \subset \mathbb{C}^d$, bestående av en uppsättning koordinatplan, sådan att a) $(\mathbb{C}^d \setminus Z)/G \simeq \mathbb{X}^n$; b) den tillslutna banan $\overline{G\zeta} \subset \mathbb{Y}^d$ skär $S_\infty(\mathbb{Y})$ i en enda punkt.

Unionen av plan Z ovan har egenskapen att de Rham-gruppen $H^{d+n}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ är endimensionell och alla högre grupper $H^k(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, $k > d+n$, är triviala. Generatorn $\omega^{d,n}$ för gruppen $H^{d+n}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ är en form av bigrad (d,n) som vi kallar en *kärna* för Z. Det råder ett nära samband mellan kärnan och volymsformen (en generaliserad Fubini–Study-form) på $\mathbb{X}^n$. Med hjälp av de homogena koordinaterna $\zeta \in \mathbb{C}^d$ på mångfalden $\mathbb{X}^n$ kan volymsformen konstrueras som en G-invariant (n,n)-form $\eta^{n,n} = \overline{E(\zeta)} \wedge E(\zeta)/Q(\zeta,\bar{\zeta})$, där $E(\zeta)$ är en analog till Euler-formen och Q är ett polynom av lämplig polyhomogenitet som är positivt på $\mathbb{C}^d \setminus Z$.

Vi bevisar att formen $\omega^{d,n} = \overline{E(\zeta)} \wedge d\zeta/Q(\zeta,\bar{\zeta})$ är en kärna för Z, samt att

$$\int_{\mu^{-1}(r)} \omega^{d,n} = \int_{\mathbb{X}^n} \eta^{n,n},$$

där $\mu\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^{d-n}$ är momentavbildningen med avseende på G och r är en vektor i Kählerkonen för $\mathbb{X}^n$. Idéerna från denna föreläsning har sedemera tagits upp av min elev Alexej Kytmanov.

Litteraturhänvisning

Alexej Kytmanov An analog of the Fubini–Study form for two-dimensional toric varieties *Siberian Mathematical Journal* **44** (2003) 286-297

Mikael Passare

Amöbor och Laurent-serier

Här presenteras ett gemensamt arbete med Mikael Forsberg och August Tsikh. Låt f vara ett Laurent-polynom, det vill säga ett uttryck av typen $f(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha z^\alpha$, där A är en ändlig delmängd av heltalsgittret $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ och koefficienterna a_α är komplexa tal. Konvexa höljet (i $\mathbb{R}^n$) av A kallas *Newton-polytopen* för f, och vi betecknar den med $\mathcal{N}_f$. Bilden av nollställemängden $\{f(z) = 0\}$ under avbildningen

$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto (\log|z_1|,\ldots,\log|z_n|)$$

kallas *amöban* till f, och den skriver vi som $\mathcal{A}_f$. Amöban är en sluten semianalytisk delmängd av $\mathbb{R}^n$ och då $n > 1$ har den tentakellika asymptoter som går ut mot oändligheten. Amöbans komplement $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ består av ett ändligt antal sammanhängande komponenter. Samtliga dessa komponenter är konvexa och de står i bijektiv korrespondens med de olika Laurent-serieutvecklingarna av den rationella funktionen $1/f$.

Givet en sammanhängande komponent E av $\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{A}_f$ definierar vi dess *ordning* som den heltalsvektor $\nu(E) \in \mathbb{Z}^n$ vars komponenter ges av att $\nu_j(E)$ är lika med antalet nollställen innanför enhetscirkeln $|w| = 1$ hos envariabelfunktionen

$$w \longmapsto f(z_1,\ldots,wz_j,\ldots,z_n),$$

då $(\log|z_1|,\ldots,\log|z_n|) \in E$. Vi bevisar att ν i själva verket är en injektiv avbildning $\{\text{komponenter av } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f\} \mapsto \mathcal{N}_f \cap \mathbb{Z}^n$. Detta medför naturligtvis speciellt att komplementet $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ inte kan ha fler sammanhängande komponenter än antalet heltalspunkter i Newton-polytopen.

För varje heltalspunkt $\nu \in \mathcal{N}_f \cap \mathbb{Z}^n$ definieras den *duala konen* till $\mathcal{N}_f$ i punkten ν som mängden

$$C_\nu = \{\, s \in \mathbb{R}^n;\ \langle s,\nu\rangle = \max_{\alpha\in\mathcal{N}_f} \langle s,\alpha\rangle \,\}.$$

Vi bevisar att om komponenten E har ordning $\nu = \nu(E)$ så sammanfaller den duala konen C_ν med recessionskonen för den konvexa mängden E. Det vill säga att för varje $x \in E$ har man att $x + C_\nu \subset E$, men ingen strikt större kon är innehållen i E.

Litteraturhänvisning

MIKAEL FORSBERG, MIKAEL PASSARE & AUGUST TSIKH Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas *Advances in Mathematics* **151** (2000) 45-70