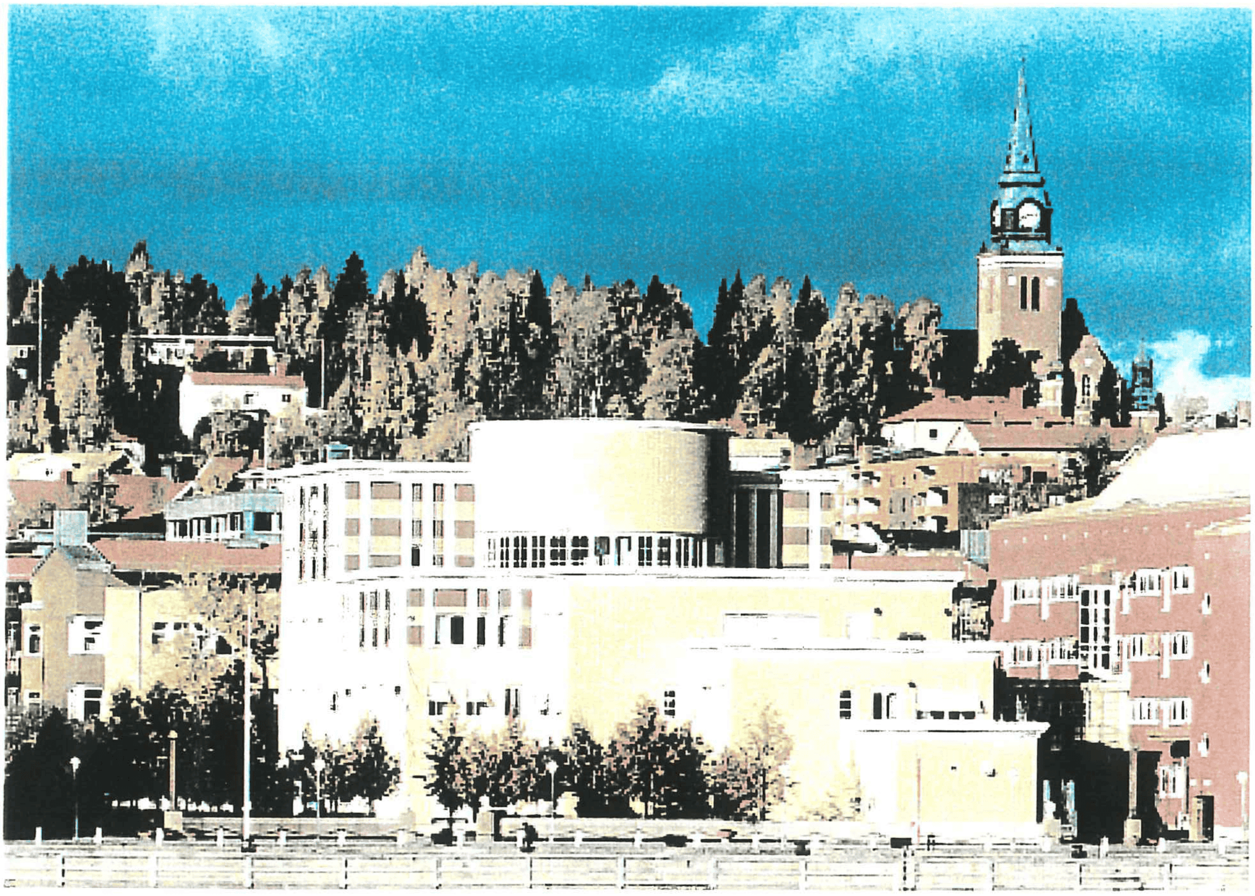
NORDAN FYRA

Ankaret i Örnsköldsvik, 5-7 maj 2000



MILLENNIETS första Nordan-konferens ordnades gemensamt av Mitthögskolan i Sundsvall och Umeå universitet. Det var därför naturligt att förlägga den mitt emellan dessa orter - till Höga kustens nordligaste utpost Örnsköldsvik. De tolv föredragen hölls i högskolebyggnaden "Ankaret" nere vid hamnen och deltagarna var inkvarterade på *Hotel Statt* strax intill. En höjdpunkt var lördagens middag som intogs på restaurang Varvsberget, belägen ovanför Paradiskullens klassiska hoppbacke med utsikt över havet och hela staden. Hit upp kördes de flesta deltagare med buss medan andra, mer strapatsbenägna matematiker, visade prov på sina "friska viljor" genom att i den ljusa vårkvällen bestiga berget till fots.

DELTAGARE

Lars Alexandersson (Linköping)
Jockum Aniansson (Stockholm)
Mats Andersson (Göteborg)
Ulf Backlund (Umeå)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jan Boman (Stockholm)
Alexander Brudnyi (Beer Sheva)
Natalia Bushueva (Krasnojarsk)
Magnus Carlehed (Norrköping)
Hasse Carlsson (Göteborg)
Urban Cegrell (Sundsvall/Umeå)
Evgeni Chirka (Moskva)
Alicia Dickenstein (Buenos Aires)
Peter Ebenfelt (Stockholm)
Bruno Fabre (Stockholm)
Lars Filipsson (Gävle)
Mikael Forsberg (Gävle)
Anders Fällström (Sundsvall)
Lars Hörmander (Lund)
Björn Ivarsson (Uppsala)
Robert Juhlin (Stockholm)
Christer Kiselman (Uppsala)
Georgi Khimshiashvili (Uppsala)
Mika Koskenoja (Helsingfors)
Frank Kutzschebauch (Uppsala)
Oscar Lemmers (Amsterdam)
Norman Levenberg (Auckland)
Niklas Lindholm (Göteborg)
Erik Løw (Oslo)
Klas Markström (Umeå)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Petersson (Växjö)
Mihail Putinar (Santa Barbara)
Alexander Rashkovskii (Charkov)
Juhani Riihentaus (Joensuu)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Hans Rullgård (Stockholm)
Timur Sadykov (Stockholm)
Sebastian Sandberg (Göteborg)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Ragnar Sigurdsson (Sundsvall)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Jan Wiegerinck (Amsterdam)
Frank Wikström (Umeå)
Jonas Wiklund (Umeå)
Yang Xing (Umeå)
Lucas Zinner (Wien)
Per Åhag (Sundsvall)
Ozan Öktem (Stockholm)
Nils Øvrelid (Oslo)

[50 personer]

PROGRAM

Fredag 5 maj

17.00-17.45 Ozan Öktem
Extension of separately analytic functions
and applications to mathematical tomography
18.00-18.45 Norman Levenberg
Transfinite diameter in $\mathbf{C}^n$

Lördag 6 maj

09.00-09.45 Lars Hörmander
Approximation of solutions of boundary problems and of entire functions
10.00-10.45 Erik Løw
Solving the d- and $\bar{\partial}$*-equations in thin tubes and applications to mappings*
11.15-12.00 Bo Berndtsson
Complex analysis on currents
12.15-13.00 Jan Boman
A Paley–Wiener theorem for the analytic wave front set
15.00-15.45 Christer Kiselman
Lineal convexity, $\mathbf{C}$*-convexity, and convexity*
16.00-16.45 Jockum Aniansson
Fischer kernels and Cauchy problems for the wave equation
17.15-18.00 Nikolay Shcherbina
Hulls and Levi-flat surfaces

Söndag 7 maj

09.00-09.45 Lars Filipsson
PDE-preserving polynomial interpolation
10.00-10.45 Juhani Riihentaus
Subharmonic functions: Non-tangential and tangential boundary behavior
11.00-11.45 Hasse Carlsson
Harmonic analysis and several complex variables

ARRANGÖRER

Jörgen Boo, Urban Cegrell, Anders Fällström och Ragnar Sigurdsson

FINANSIÄRER

Naturvetenskapliga forskningsrådet
Kungliga vetenskapsakademien
Mitthögskolan
Umeå universitet

Ozan Öktem

Utvidgning av separatanalytiska funktioner och tillämpningar på matematisk tomografi

Givet en testfunktion h på $\mathbf{R}^2$, definierar vi den generaliserade exponentiella Radon-transformen $R_\rho(h)$ av h som integralen

$$R_\rho(h)(\omega, p) = \int_{x\cdot\omega=p} h(x) e^{\rho(\omega) x\cdot\omega^\perp}\, dm(x)\,.$$

I denna definition betecknar $\rho\colon S^1 \to \mathbf{R}$ en fix funktion (som i vårt fall kommer att vara en rationell funktion), och vi använder även notationen $\omega = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ för $0 \le \alpha < 2\pi$, $\omega^\perp = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, samt dm för det 1-dimensionella Lebesgue-måttet på linjen $x \cdot \omega = p$.

Inom den matematiska tomografin är det ett problem av stort intresse att invertera operatorn R_ρ, och i detta sammanhang är det naturligtvis av stor vikt att också studera operatorns entydighetsegenskaper samt att karakterisera dess bild när den får verka på olika givna funktionsrum.

Jag kommer här att rapportera om resultat som uppnåtts i samarbete med min handledare Jan Boman, och jag väljer att begränsa mig till det senare delproblemet, närmare bestämt att karakterisera bilden av den generaliserade exponentiella Radon-transformen R_ρ när den verkar på rummet av testfunktioner på $\mathbf{R}^2$. Vi kommer särskilt att påvisa hur utvidgningsegenskaper hos separatanalytiska funktioner spelar en central roll för lösningen av detta bildkarakteriseringsproblem. Närmare bestämt bevisar vi följande nya resultat.

Sats: *Sätt $X = (\mathbf{R} \times \mathbf{C}) \bigcup (\mathbf{C} \times \mathbf{R})$ och låt Γ beteckna diagonalen $\{(z, w) \in \mathbf{C}^2\,;\ z = w\}$. Då gäller att varje separatholomorf funktion $f\colon X \setminus \Gamma \to \mathbf{C}$ kan fortsättas holomorft till $\mathbf{C}^2 \setminus \Gamma$.*

Litteraturhänvisning

Ozan Öktem Extension of separately analytic functions and applications to range characterization of the exponential Radon transform
Annales Polonici Mathematici **70** (1998) 195–213

Norman Levenberg

Transfinit diameter i $\mathbf{C}^n$

Låt $K \subset \mathbf{C}^n$ vara en kompakt mängd och låt w vara en icke-negativ, uppåt halvkontinuerlig funktion på K sådan att delmängden $\{ z \in K\,;\ w(z) > 0 \}$ inte är pluripolär. Sätt sedan $Q = -\log w$ och definiera den viktade plurikomplexa Green-funktionen som den uppåt halvkontinuerliga regulariseringen $V^*_{K,Q}(z) = \limsup_{\zeta \to z} V_{K,Q}(\zeta)$ av den extremala enveloppen

$$V_{K,Q}(z) := \sup\{ u(z)\,;\ u \text{ plurisubharmonisk i } \mathbf{C}^n\,,\ u(z) \leq \log^+ |z| + C\,,\ u \leq Q \text{ på } K \}\,,$$

varvid konstanten C tillåts bero på u. Om $w \equiv 1$, det vill säga om $Q \equiv 0$, så befinner vi oss i det oviktade fallet, och vi skriver då helt enkelt $V_K = V_{K,0}$. Vi bevisar viktade generaliseringar av en rad resultat inom pluripotentialteorin, och vi härleder även en entydighetsegenskap för fortsättning av maximala plurisubharmoniska funktioner.

Med hjälp av dessa resultat visar vi sedan en ny sats om transfinit diameter i $\mathbf{C}^n$. Vi påminner om Vyacheslav Zaharjutas definition av den transfinita diametern $d(K)$ av en kompakt $K \subset \mathbf{C}^n$. Låt $e_1(z), e_2(z), \ldots, e_k(z), \ldots$ vara den vanliga lexikografiska uppräkningen av monomen $\{z^\alpha;\ \alpha \in \mathbf{N}^n\}$ och betrakta, för varje positivt heltal k, den maximala Vandermonde-determinanten

$$V_k = \max_{\zeta_1,\ldots,\zeta_k \in K} \left| \det\left[e_i(\zeta_j)\right]_{i,j=1,\ldots,k} \right|.$$

Sätt också $k_d = \#\{i;\ \deg(e_i) \leq d\}$ och $\ell_d = \sum_{i=1}^{k_d} \deg(e_i)$. Då definieras den transfinita diametern som gränsvärdet

$$d(K) = \lim_{d \to \infty} V_{k_d}^{1/\ell_d}\,.$$

Vår huvudsats kan nu formuleras på följande vis. För kompakta delmängder $E \subset F$ av $\mathbf{C}^n$ gäller $d(E) = d(F)$ om och endast om $V^*_E = V^*_F$.

Enligt ett känt resultat av Eric Bedford och Alan Taylor är villkoret $V^*_E = V^*_F$ i sin tur ekvivalent med att de polynomkonvexa höljena $\widehat{E}$ och $\widehat{F}$ skiljer sig åt med endast en pluripolär mängd.

Litteraturhänvisning

THOMAS BLOOM & NORMAN LEVENBERG Weighted pluripotential theory in $\mathbf{C}^n$ *American Journal of Mathematics* **125** (2003) 57–103

Lars Hörmander

Approximation av lösningar till randvärdesproblem samt av hela funktioner

Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ vara öppen och konvex, $\omega = \{x \in \Omega\,;\, x_n = 0\} \neq \varnothing$, och låt $P(D)$ och $Q_1(D), \dots, Q_J(D)$ vara differentialoperatorer med konstanta koefficienter. Planet där $x_n = 0$ antas vara icke-karakteristiskt med avseende på $P(D)$, av ordningen m. Sätt

$$(1)\qquad C^\infty_{P,\vec{Q}}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega)\,;\, P(D)u = 0 \text{ i } \Omega,\ Q_1(D)u = \ldots = Q_J(D)u = 0 \text{ i } \omega\}$$

och beteckna med $E_{P,\vec{Q}}$ det lineära underrum av $C^\infty_{P,\vec{Q}}(\mathbf{R}^n)$ som genereras av exponentiallösningar, alltså lösningar av formen

$$(2)\qquad u(x) = \sum_1^m v_k(x) e^{i\langle x', \zeta'\rangle + i\lambda_k x_n},$$

där v_k är polynom, $x = (x', x_n)$, $\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}$, och λ_k är nollställena till $P(\zeta', \lambda)$. *Vad är då villkoret för att $E_{P,\vec{Q}}$ (inskränkt till Ω) skall vara tät i $C^\infty_{P,\vec{Q}}(\Omega)$?* Enligt Hahn–Banachs sats är detta sant om och endast om varje $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ som är ortogonal mot $E_{P,\vec{Q}}$ också är ortogonal mot $C^\infty_{P,\vec{Q}}(\Omega)$.

1. *En distribution $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ är ortogonal mot $E_{P,\vec{Q}}$ om och endast om*

$$(3)\qquad \hat{\nu}(\zeta) = P(-\zeta)\Phi(\zeta) + \sum_1^J Q_j(-\zeta) a_j(\zeta'), \quad \zeta \in \mathbf{C}^n,$$

där $\hat{\nu}$ är Fourier–Laplace-transformen av ν, samt Φ och a_j är hela funktioner i $\mathbf{C}^n$ respektive $\mathbf{C}^{n-1}$. Om H är stödfunktionen för $\operatorname{supp}\nu$ så kan a_j väljas så att för några C och N

$$(4)\qquad |a_j(\zeta')| \leq C(1+|\zeta'|)^N e^{\tilde{H}(\zeta')}, \quad \zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}.$$

Här är $\tilde{H}(\zeta') = \max_{P(-\zeta', -\zeta_n)=0} H(\operatorname{Im}\zeta', \operatorname{Im}\zeta_n)$, och vi har

$$(5)\qquad |\Phi(\zeta)| \leq C'(1+|\zeta|)^N (e^{H(\operatorname{Im}\zeta)} + e^{\tilde{H}(\zeta')}), \quad \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

Beviset ligger nära diskussionen i ett arbete av Christer Kiselman från 1965 där motsvarande approximationsproblem för holomorfa funktioner behandlades.

2. *Om $u \in C^\infty(\Omega)$ så är $u \in C^\infty_{P,\vec{Q}}(\Omega)$ om och endast om $\langle u, \nu\rangle = 0$ för alla $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ av formen*

$$(6)\qquad \hat{\nu}(\zeta) = P(-\zeta)\hat{\varphi}(\zeta) + \sum_1^J Q_j(-\zeta)\hat{\varphi}_j(\zeta'), \quad \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega),\ \varphi_j \in \mathcal{E}'(\omega).$$

Detta är helt enkelt den svaga formen av ekvationerna (1).

Frågan gäller alltså om slutna höljet av distributioner av formen (6), för någon lokalt konvex topologi i $\mathcal{E}'(\Omega)$ med dualrum $C^\infty(\Omega)$, innehåller alla distributioner som uppfyller villkoret **1**. Svårigheten är att om P inte är hyperbolisk så tillåter uppskattningen (4) exponentiell tillväxt för a_j i $\mathbf{R}^{n-1}$ medan $\hat{\varphi}_j$ i (6) har polynomiell begränsning. En metod vi tidigare (1968) använt för att lösa ett liknande problem för faltningsekvationer kan anpassas till denna situation. Den består av att Φ and a_j i (3) multipliceras med en Gaussisk funktion som $\exp(-\varepsilon\langle\zeta,\zeta\rangle)$, $\varepsilon > 0$, multiplikationen skärs av när den inte längre är en förbättring, och analyticiteten återställs med hjälp av existenssatser för $\bar{\partial}$ operatorn i viktade L^2 rum. Detta ger den önskade approximationssatsen om Ω är tillräckligt platt, till exampel konvexa höljet av ω och en tillräckligt liten omgivning av en inre punkt. Speciellt är $E_{P,\vec{Q}}$ tät i $C^\infty_{P,\vec{Q}}(\mathbf{R}^n)$.

Emellertid leder denna metod inte till fullständiga resultat om $n > 2$. Vad som krävs är vissa approximationssatser för hela funktioner. Ett sådant modellproblem är följande: Låt ω vara en öppen konvex begränsad omgivning till origo i $\mathbf{R}^N$ och låt φ vara en plurisubharmonisk funktion i $\mathbf{C}^N$ som är positivt homogen av ordningen 1 och Hölder-kontinuerlig. Vad är då villkoret för att Fourier–Laplace-transformen av $C_0^\infty(\omega)$ skall vara en tät delmängd av Hilbert-rummet av hela funktioner f i $\mathbf{C}^N$ med $\|f\|_\varphi = \|fe^{-\varphi}\|_{L^2(\mathbf{C}^N)} < \infty$? Om φ är konvex så är detta sant om och endast om $\varphi(\zeta) \geq h(\operatorname{Im}\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{C}^N$, med likhet då $\zeta = i\xi$ och $\xi \in \mathbf{R}^N$, $\varphi(\pm\xi) = 0$. Här är h stödfunktionen för ω. Dessa villkor är alltid nödvändiga men tillräckligheten är en öppen fråga då φ inte är konvex. Approximationsproblem av detta slag har otvivelaktigt mycket större allmänt intresse än det approximationsproblem för randvärdesproblem som leder till dem.

Litteraturhänvisningar

LARS HÖRMANDER Convolution equations in convex domains *Inventiones Mathematicae* **4** (1968) 306–317

CHRISTER KISELMAN Existence and approximation theorems for solutions of complex analogues of boundary problems *Arkiv för matematik* **6** (1965) 193–207

Erik Løw

Lösning av d- och $\bar\partial$-ekvationerna i smala tuber och tillämpningar på avbildningar

Låt $M \subset \mathbf{C}^n$ vara en kompakt totalt reell delmångfald av klass C^1 och beteckna med $\mathcal{T}_\delta M$ tuben med radie $\delta > 0$ kring M. Det vill säga

$$\mathcal{T}_\delta M = \left\{ z \in \mathbf{C}^n \,;\, \inf_{w \in M} |z - w] < \delta \right\}$$

består av alla punkter på avstånd mindre än δ från M. Vi konstruerar en familj av integralkärnor för att lösa $\bar\partial$-ekvationen med C^k och Hölder-uppskattningar i tuben $\mathcal{T}_\delta M$.

En känd sats av Jean-Pierre Serre säger att på pseudokonvexa områden kan de Rham-kohomologin representeras med holomorfa differentialformer. Genom att kombinera våra metoder med (beviset av) Serres sats löser vi därefter d-ekvationen med uppskattningar för holomorfa former i sådana tubområden.

Vi tillämpar sedan dessa tekniker samt en metod av Jürgen Moser för att approximera C^k-avbildningar. Mer precist, låt $f\colon M_0 \to M_1$ vara en diffeomorfi av klass C^k mellan två kompakta totalt reella mångfalder $M_0, M_1 \subset \mathbf{C}^n$. Under förutsättning att M_0 och M_1 har isomorfa komplexa normalknippen kan vi då approximera f i C^k-topologin med biholomorfa avbildningar mellan tuber kring M_0 och M_1.

Vi studerar också approximation med unimodulära och symplektiska biholomorfa avbildningar, samt med automorfier av $\mathbf{C}^n$. Vi visar till exempel att om M_0 och M_1 antas vara polynomkonvexa och av reell dimension högst $2n/3$ så finns en följd av automorfier $F_j \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}^n$ sådan att $F_j|_{M_0} \to f$ och $F_j^{-1}|_{M_1} \to f^{-1}$ i C^k-topologin. Detta är ett gemensamt arbete tillsammans med Franc Forstnerič och Nils Øvrelid.

Litteraturhänvisning

FRANC FORSTNERIČ, ERIK LØW & NILS ØVRELID Solving the d- and $\bar\partial$-equations in thin tubes and applications to mappings
The Michigan Mathematical Journal **49** (2001) 369–416

Bo Berndtsson

Komplex analys på strömmar

Den inhomogena $\bar{\partial}$-ekvationen är väldefinierad på varje komplex mångfald och kan också ges en innebörd på mångfalder med singulariteter. I det här föredraget introducerar vi $\bar{\partial}$-ekvationer på en positiv ström i (ett område i) $\mathbf{C}^n$. Om u är en testform i det omgivande rummet och T är en positiv ström definieras "$\bar{\partial}u = f$ på T" genom kravet att

$$\bar{\partial}u \wedge T = f \wedge T \, .$$

Vi inför också viktade L^2-normer av former på en ström och studerar två utvidgningar av $\bar{\partial}$-operatorn till en sluten tätt definerad operator på L^2. Vårt huvudresultat gäller fallet när T är sluten av antingen *bigrad* eller *bidimension* $(1,1)$. Vi får då en fullständig generalisering av de klassiska satserna om lösbarhet och L^2-uppskattningar på delmångfalder av $\mathbf{C}^n$ för sådana strömmar. Det visar sig dock att man i fallet med former av bigrad $(0,q)$ måste tolka $\bar{\partial}$-operatorn i "stark" mening, medan man i fallet (n,q), om strömmen har bidimension (n,n), måste tolka operatorn i "svag" mening. Något överraskande visar det sig också att man åtminstone i fallet med strömmar av bidimension $(1,1)$ inte behöver kräva att strömmen är sluten – det räcker med ett svagare integrabilitetsvillkor relaterat till Frobenius sats. Vi visar också med ett motexempel att samma sats inte kan gälla för alla – ens slutna – strömmar av godtycklig bigrad.

Beviset bygger på två huvudingredienser: en a priori olikhet för testformer och en teknik att regularisera former på en ström. Det senare är egentligen den huvudsakliga svårigheten i beviset, och löses genom att man regulariserar stömmen själv och data på strömmen samtidigt – en teknik som inte är tillgänglig vid till exempel analys på singulära varieteter.

Resultaten illustreras med exempel från singulära varieteter, folieringar och konkava områden. Speciellt i fallet med folieringar är det av intresse att man inte behöver kräva att strömmen är sluten eftersom en foliering inte är asocierad till en sluten ström om den saknar invariant transversellt mått, men däremot alltid bär en ström som uppfyller vårt integrabilitetsvillkor.

Litteraturhänvisning

Bo Berndtsson & Nessim Sibony The $\bar{\partial}$-equation on a positive current
Inventiones Mathematicae **147** (2002) 371–428

Jan Boman

En Paley–Wiener-sats för den analytiska vågfrontsmängden

Det följer från Paley–Wieners sats och Phragmén–Lindelöfs sats att stödfunktionen H för stödet till en kompaktstödd distribution u ges av

$$H(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbf{R}^n} i_{\hat{u}}(\xi + i\eta) = i_{\hat{u}}(i\eta)\,, \qquad \eta \in \mathbf{R}^n\,. \tag{1}$$

Här betecknar $i_{\hat{u}}$ indikatorfunktionen för $\hat{u}$, och denna definieras som den uppåt halvkontinuerliga regulariseringen av funktionen $\zeta \mapsto \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log|\hat{u}(t\zeta)|$. Jag kommer att beskriva ett gemensamt resultat med Lars Hörmander om hur information om de analytiska singulatiteterna hos u kan erhållas från uppförandet hos funktionen $i_{\hat{u}}(\zeta)$ i punkter ζ nära $\mathbf{R}^n$.

För en given punkt $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ betecknar vi med H_ξ stödfunktionen för mängden $K_\xi = \{\, x\,;\ (x,\xi) \in WF_A(u)\,\}$ av analytiska singulariteter med kotangentriktning ξ. Då gäller

$$H_\xi(\eta) = \lim_{\delta\to+0}\liminf_{s\to+0}\sup_{|\tilde{\xi}-\xi|<\delta} i_{\hat{u}}(\tilde{\xi}+is\eta)/s = \limsup_{s\to+0,\tilde{\xi}\to\xi} i_{\hat{u}}(\tilde{\xi}+is\eta)/s, \qquad \eta \in \mathbf{R}^n\,. \tag{2}$$

Denna utsaga är också sann för hyperfunktioner med kompakt stöd.

Eftersom $i_{\hat{u}} = 0$ på $\mathbf{R}^n$ är gränsvärdet $\lim_{s\to+0} i_{\hat{u}}(\tilde{\xi}+is\eta)/s$, om det existerar, lika med (höger-)riktningsderivatan $D_\zeta i_{\hat{u}}$ av $i_{\hat{u}}$ i riktningen $\zeta = i\eta$ evaluerad i $\tilde{\xi}$. Om detta gränsvärde existerar likformigt i $\tilde{\xi}$ för $\tilde{\xi}$ nära ξ, så är $H_\xi(\eta) = D_{i\eta} i_{\hat{u}}(\xi)$ enligt det mittersta av uttrycken i (2).

Eftersom varje randpunkt för $\operatorname{supp} u$ måste tillhöra det analytiska singulära stödet $\operatorname{singsupp}_A u$, så är konvexa höljet av $\operatorname{singsupp}_A u$ lika med konvexa höljet av $\operatorname{supp} u$, alltså kan konvexa höljet av $\operatorname{singsupp}_A u$ redan bestämmas genom (1). A priori skulle man kunna tänka sig att (2) gav mer information om $\operatorname{singsupp}_A u$ än (1); så är emellertid inte fallet, ty vi visar att unionen av alla K_ξ är lika med konvexa höljet av $\operatorname{supp} u$. Beviset består av ett topologiskt argument som handlar om icke-existens av vissa vektorfält på sfärer.

Enligt en sats av Ragnar Sigurdsson kan varje positivt homogen plurisubharmonisk funktion på $\mathbf{C}^n$ som är lika med 0 på $\mathbf{R}^n$ beskrivas som indikatorfunktionen för Fourier–Laplace-transformen av en distribution. Utsagan (2) medför därför att de tre uttrycken i högra ledet måste överensstämma för varje sådan funktion, ett faktum som är långt ifrån uppenbart. För en större klass av plurisubharmoniska funktioner ger vi ett direkt bevis för dessa likheter, oberoende av utsagan (2) och av Sigurdssons sats.

Litteraturhänvisning

JAN BOMAN & LARS HÖRMANDER A Paley–Wiener theorem for the analytic wave front set *The Asian Journal of Mathematics* **3** (1999) 757–770

Christer Kiselman

Lineell konvexitet, C-konvexitet och konvexitet

Vid sidan av vanlig konvexitet och pseudokonvexitet finns även flera andra intressanta konvexitetsbegrepp i komplex geometri. En mängd i $\mathbf{C}^n$ sägs vara *lineellt konvex* om dess komplement är en union av komplexa hyperplan. En öppen mängd sägs vara $\mathbf{C}$-*konvex* om dess snitt med varje komplex linje är antingen tomt eller sammandragbart till en punkt.

I min föreläsning diskuterade jag ett resultat som förbinder flera konvexitetsbegrepp: jag visade att lineellt konvexa Hartogs-områden definierar en konvex mängd om de uppfyller ett villkor som impliceras av $\mathbf{C}$-konvexitet. Närmare bestämt visade jag satsen nedan.

För att beskriva resultatet definierar vi till varje randpunkt $a \in \partial\Omega$ till en öppen mängd Ω i $\mathbf{C}^n$ en mängd $\Gamma(a)$, bestående av alla affina komplexa hyperplan som går genom a och inte skär Ω. Svag lineell konvexitet betyder att $\Gamma(a)$ är icke-tom för varje randpunkt a.

Ett exempel är mängden som definieras av $|t| < R(z) = \min(|z-4|, |z+4|, 35-|z|)$. Den är svagt lineellt konvex men $\Gamma((0,4))$ är inte sammanhängande: den består av exakt två element.

Sats: *Låt R vara en reellvärd funktion som är definierad i $\mathbf{C}^n$. Definiera*

$$\Omega = \{(z,t) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}; |t| < R(z)\}.$$

Anta att Ω är öppen och icke-tom och att $\Gamma(a)$ är icke-tom och sammanhängande för varje punkt $a = (z^0, t^0) \in \partial\Omega$ med $t^0 \neq 0$. Då är mängden M där R antar sitt supremum, alltså

$$M = \{z \in \mathbf{C}^n; R(z) = \sup R\},$$

konvex.

Denna sats är en utveckling av sats 4.8 i Kiselman (1996) som ännu inte hunnit publiceras.

Litteraturhänvisningar

CHRISTER KISELMAN Lineally convex Hartogs domains
Acta Mathematica Vietnamica **21** (1996) 69–94

CHRISTER KISELMAN A differential inequality characterizing weak lineal convexity
Mathematische Annalen **311** (1998) 1–10

Jockum Aniansson

Fischer-kärnor och Cauchy-problem för vågekvationen

Låt $P(w)$ och $Q(z)$ vara två polynom i n komplexa variabler. Vi söker en uppdelning av exponentialkärnan $e^{w\cdot z} = \exp(w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n)$ som en summa $e^{w\cdot z} = h(w,z) + g(w,z)$, där $P(D_z)\,h = 0$ och $Q(z)$ delar g. Om det entydigt existerar hela funktioner $h(w,z)$ och $g(w,z)$, av exponentiell typ med avseende på z, som uppfyller detta, så kallar vi dem *Fischer-kärnor.* I så fall får vi också en uppdelning med avseende på det duala paret $Q(D_w)$ och $P(w)$, det vill säga att även $P(w)$ delar g, samtidigt som $Q(D_w)\,h = 0$. Vidare finns en funktion G, kallad *moderfunktion*, som uppfyller

$$g(w,z) = P(w)\,Q(z)\,G(w,z), \quad e^{w\cdot z} = P(D_z)\,Q(z)\,G(w,z), \quad e^{w\cdot z} = Q(D_w)\,P(w)\,G(w,z).$$

Om vi först byter ut w mot $-iw$ och sedan (för de z för vilket detta är möjligt) tar (invers) Fourier-transform med avseende på $w \in \mathbf{R}^n$ som tempererade distributioner, så får vi uppdelningen $\delta_z(s) = \delta(s-z) = \eta(s,z) + P(-D_s)\,Q(z)\,\mathcal{G}(s,z)$, där $P(D_z)\,\eta(s,z) = 0$ och $Q(s)\,\eta(s,z) = Q(s)\,\eta_z(s) = 0$. (Här kommer η från h, och $\mathcal{G}$ kommer från G). Observera att distributionen η_z lever där $Q(s) = 0$, $s \in \mathbf{R}^n$.

Om vi nu parar δ-ekvationen med avseende på s med en (tillräckligt snäll) funktion $\varphi(s)$, så får vi, genom att vända på resonemanget, för givna funktioner ψ och f lösningen φ till det inhomogena Cauchy–Goursat-problemet i $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{cases} P(D)\,\varphi = \psi\,, & \\ \quad\;\; \varphi = f & \text{då} \quad Q = 0\,, \quad \text{(egentligen: } Q \text{ delar } \varphi - f)\,, \end{cases}$$

medelst formlerna

$$\varphi = \varphi_{\text{hom}} + \varphi_{\text{part}}\,, \quad \text{där} \;\; \varphi_{\text{hom}}(z) = \langle\, \eta_z \mid f \,\rangle \;\; \text{och} \;\; \varphi_{\text{part}}(z) = Q(z)\,\langle\, \mathcal{G}_z \mid \psi \,\rangle\,.$$

(Här sker parning med avseende på variabeln s.)
Det syns att $\mathrm{Gr}(s,z) = Q(z)\,\mathcal{G}_z(s) = Q(z)\,\mathcal{G}(s,z)$ är *Green-funktionen.*

Exempel 1. Vi skriver $w' = (w_1,\ldots,w_{n-1})$ och $\omega^2 = w_1^2 + \cdots + w_{n-1}^2$, och väljer polynomen $P(w) = \omega^2 - w_n^2$ (så att $P(D_z)$ är vågoperatorn) samt $Q(z) = z_n^2$. Då fås

$$h(w,z) = e^{w'\cdot z'}\left[\cos(iz_n\omega) + w_n z_n \frac{\sin(iz_n\omega)}{iz_n\omega}\right],$$

vilket efter Fourier-transformering ger lösningen till vågekvationen med dubbla data på initialmängden $Q = z_n^2 = 0$, där z_n är tidsvariabeln. Då $n = 4$ (tre rumsdimensioner) får vi Kirchhoffs formel.

Exempel 2. Här tas P som ovan, och $Q = P$. Då är $Q = 0$ på ljuskonen $(z')^2 - z_n^2 = 0$, och vi får en lösning till det karakteristiska Cauchy-problemet för vågekvationen med data på denna kon.

Litteraturhänvisning

Jockum Aniansson Some integral representations in real and complex analysis. Peano–Sard kernels and Fischer kernels
Doktorsavhandling, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm (1999)

Nikolay Shcherbina

Höljen och Levi-platta ytor

Att för en given reellt 2-dimensionell kompakt mångfald $\Gamma \subset \mathbf{C}^2$ beskriva dess polynomkonvexa hölje $\widehat{\Gamma}$ tycks vara ett mycket svårt problem. Detsamma gäller den närbesläktade frågan huruvida det existerar en Levi-platt hyperyta $M \subset \mathbf{C}^2$ sådan att $\partial M = \Gamma$. Vissa framsteg har dock på senare år gjorts i den speciella situationen då Γ är en topologisk 2-sfär som ligger i randen till ett strikt pseudokonvext område.

Låt oss betrakta fallet då Γ är en graf. Mer precist, givet ett begränsat, strikt konvext område $G \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ och en kontinuerlig funktion $\varphi\colon \partial G \to \mathbf{R}$, så sätter vi

$$\Gamma = \{(z, \varphi(z)) \in \mathbf{C}^2 \,;\; z \in \partial G\}.$$

Eric Bedford och Bernard Gaveau visade 1983 att om Γ är tillräckligt slät och totalt reell, förutom i två elliptiska punkter, så fås höljet $\widehat{\Gamma}$ genom att lägga till en Levi-platt hyperyta. I arbeten från 1991, dels av Nikolay Kruzhilin, dels av Bedford tillsammans med Wilhelm Klingenberg, tillät man Γ att ha ett godtyckligt ändligt antal punkter med komplex tangering, alla antingen elliptiska eller hyperboliska. Det visade sig emellertid snart att det i detta sammanhang är oväsentligt vilken position Γ har i förhållande till den omgivande komplexa strukturen, samt att inga antaganden om deriverbarhet behövs. Vi bevisade nämligen 1993 att för varje kontinuerlig φ gäller

(i) skillnaden $\widehat{\Gamma} \setminus \Gamma$ är unionen av en familj parvis disjunkta komplexa skivor $\{D_\alpha\}$,

(ii) för varje α finns ett enkelt sammanhängande område $\Omega_\alpha \subset \mathbf{C}$ och en holomorf funktion $f_\alpha\colon \Omega_\alpha \to \mathbf{C}$ sådan att $D_\alpha = \{(z, f_\alpha(z)) \,;\; z \in \Omega_\alpha\}$,

(iii) varje f_α har en utvidgning $f_\alpha^* \in C(\bar{\Omega}_\alpha)$ sådan att $\partial D_\alpha = \{(z, f_\alpha^*(z)) \,;\; z \in \partial\Omega_\alpha\}$,

(iv) varje $\mathbf{C} \setminus \bar{\Omega}_\alpha$ är sammanhängande.

Tillsammans med Giuseppe Tomassini har vi nyligen studerat fallet då $G \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ är ett obegränsat område, och det visar sig då att nya fenomen uppträder.

Det förtjänar att påpekas att John Erik Fornæss och Daowei Ma 1995 konstruerade en oknuten slät 2-sfär inbäddad i $\mathbf{C}^2$, med endast två elliptiska punkter, som *inte* kan fyllas med komplexa skivor. Villkoret att Γ ligger i randen till ett pseudokonvext område är alltså betydelsefullt.

Litteraturhänvisningar

NIKOLAY SHCHERBINA On the polynomial hull of a graph *Indiana University Mathematics Journal* **42** (1993) 477–503

NIKOLAY SHCHERBINA & GIUSEPPE TOMASSINI The Dirichlet problem for Levi-flat graphs over unbounded domains *International Mathematics Research Notices* (1999) 111–151

Lars Filipsson

PDE-bevarande polynominterpolation

Låt $H(\mathbf{C}^n)$ beteckna de holomorfa funktionerna i rummet av n komplexa variabler och $P_d(\mathbf{C}^n)$ delrummet av polynom av grad högst d. Med en *polynomiell projektor* av grad d menar vi en kontinuerlig linjär avbildning $\Pi: H(\mathbf{C}^n) \to P_d(\mathbf{C}^n)$ sådan att Π är surjektiv och uppfyller $\Pi^2 = \Pi$.

En polynomiell projektor Π sägs vara *PDE-bevarande* av grad k om det för varje homogent holomorft polynom p av grad k gäller att

$$p(D)f = 0 \Longrightarrow p(D)\,\Pi f = 0.$$

Vi använder det kortfattade skrivsättet $D = (\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$. Om villkoret är uppfyllt för alla k sägs Π vara PDE-bevarande. Det är tidigare känt att Kergins interpolationsoperator, som generaliserar klassisk Lagrange-interpolation, har denna egenskap. Vi visar att Kergin-interpolation faktiskt kan karaktäriseras i termer av sina PDE-bevarande egenskaper. Mer precist har vi följande resultat:

Sats: *Anta att* $\Pi : H(\mathbf{C}^n) \to P_d(\mathbf{C}^n)$ *är en polynomiell projektor av grad* d *som interpolerar funktionsvärden i* $1 + d$ *punkter* $c_0, c_1, \ldots, c_d$. *Då är följande villkor ekvivalenta:*

(1) Π *är PDE-bevarande.*

(2) Π *är PDE-bevarande av grad* 1.

(3) Π *är Kergins interpolationsoperator med avseende på punkterna* $c_0, c_1, \ldots, c_d$.

Vi ger också nödvändiga och tillräckliga villkor, i termer av analytiska funktionaler, för när en kontinuerlig linjär projektor är PDE-bevarande. Detta är ett gemensamt arbete med Jean-Paul Calvi.

Litteraturhänvisning

JEAN-PAUL CALVI & LARS FILIPSSON The polynomial projectors that preserve homogeneous differential relations: a new characterization of Kergin interpolation *East Journal on Approximations* **10** (2004) 441–454

Juhani Riihentaus

Subharmoniska funktioner: icke-tangentiellt och tangentiellt randuppförande

Låt Ω vara ett område i $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, och låt $\varphi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ vara en *godtagbar* funktion, alltså en strikt växande surjektiv funktion som uppfyller $\varphi(2t) \leq c\,\varphi(t)$ och $\varphi^{-1}(2t) \leq c\,\varphi^{-1}(t)$ för någon fix konstant $c > 1$ och för alla tillräckligt små $t \geq 0$. För varje randpunkt $\zeta \in \partial\Omega$ och varje positiv konstant α definierar vi

$$\Gamma_\varphi(\zeta, \alpha) = \{x \in \Omega\,;\ \varphi(|x - \zeta|) < \alpha\,\delta(x)\},$$

där $\delta(x)$ är avståndet till randen, och vi säger att randpunkten ζ är (φ, α)-*åtkomlig* om $\Gamma_\varphi(\zeta, \alpha)$ innehåller punkter godtyckligt nära ζ. Om en godtagbar funktion φ uppfyller det ytterligare villkoret

$$\sup\{\varphi(t)/t\,;\ 0 < t < r_0\} < \infty \qquad (*)$$

så är alla randpunkter till varje John-domän (φ, α)-åtkomliga för något $\alpha > 0$. Som exempel på godtagbara funktioner som uppfyller $(*)$ kan nämnas $\varphi(t) = t^\alpha[\log(1 + t^\gamma)]^\beta$ med $\alpha > 1$ och $\beta\gamma > 1 - \alpha$.

Vi säger att $\psi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ är *tillåten* om den kan skrivas som sammansättningen $\psi_2 \circ \psi_1$ av en växande konvex funktion ψ_1 som uppfyller δ_2-villkoret och en surjektiv funktion ψ_2 vars invers ψ_2^{-1} uppfyller δ_2-villkoret och med egenskapen att $s/\psi_2(s) \leq c\,t/\psi_2(t)$ för alla $s \leq t$ och någon konstant $c \geq 1$. Exempel på tillåtna funktioner är $\psi(t) = t^{p\alpha}[\log(1 + t^{p\gamma})]^\beta$ med $p \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ och $0 < \alpha + \beta\gamma < 1$.

Vi låter nu H^d beteckna det d-dimensionella Hausdorff-måttet och vi skriver Γ_ρ för de punkter $x \in \Gamma_\varphi(\zeta, \alpha)$ som uppfyller $\delta(x) < \rho$.

Sats: *Låt Ω vara en John-domän med $H^d(\partial\Omega) < \infty$ för något $d \in [0, n]$, och anta att $u \geq 0$ är en subharmonisk funktion i Ω. Låt vidare φ vara en godtagbar funktion som uppfyller $(*)$, och låt ψ vara en tillåten funktion. Anta att $\psi(u(x))\,\delta(x)^\gamma \in L^1(\Omega)$ för något $\gamma \in \mathbf{R}$. Då gäller*

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{x \in \Gamma_\rho} \left\{\delta(x)^{n+\gamma}\left[\varphi^{-1}(\delta(x))\right]^{-d} \psi(u(x))\right\} = 0\,.$$

Litteraturhänvisningar

JUHANI RIIHENTAUS Subharmonic functions: non-tangential and tangential boundary behavior *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis* Tjeckiska vetenskapsakademin, Prag (2000) 229–238

MANFRED STOLL Weighted tangential boundary limits of subharmonic functions on domains in $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ *Mathematica Scandinavica* **83** (1998) 300–308

Hasse Carlsson

Harmonisk analys och flera komplexa variabler

Föredraget beskriver vissa aspekter av samspelet mellan harmonisk analys och funktionsteori i flera komplexa variabler. Utgångspunkten är Cauchys integralformel i en komplex variabel:

$$f(z) = Cf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \, .$$

I början av åttiotalet bevisade Ronald Coifman, Alan McIntosh och Yves Meyer att Cauchy-integralen är en begränsad operator på L^2 i alla Lipschitz-områden. Ett annat resultat av forskningen kring Cauchy-integralen är den så kallade $T1$-satsen av Guy David and Jean-Lin Journé som ger nödvändiga och tillräckliga villkor för att att en singulär integraloperator ska vara begränsad på L^2.

I fallet med flera komplexa variabler kan Cauchy-integralen ersättas med Henkin–Ramirez integralformel H. Om vi för enkelhets skull antar att vårt område $\Omega = \{\rho < 0\}$ är konvext med definierande funktion ρ så ges H av integralen

$$Hf(z) = c_n \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\partial\rho \cdot (z - \zeta))^n} \partial\rho \wedge (i\partial\bar{\partial}\rho))^{n-1} \, .$$

När Ω är strikt pseudokonvext stämmer nivåkurvorna hos kärnan överens med den så kallade Koranyi-metriken på $\partial\Omega$ och tack vare detta kan man använda $T1$-satsen för att bevisa L^2-uppskattningar för H. Att H är begränsad på L^2 medför att H^1 kan definieras med hjälp av atomer, att H^1 och $BMOA$ är duala, med mera.

För strikt pseudokovexa områden har detta varit känt i drygt 20 år. Under senare år har mycket arbete ägtnats åt att försöka generalisera detta till mer allmänna pseudokonvexa områden och en viktig del av arbetet har varit att försöka förstå den relevanta metriken på randen av området.

Såvitt jag känner till har man alltid studerat H^p-rum definierade med avseende på det euklidiska ytmåttet $d\sigma$. Jag tycker att det är naturligare att arbeta med ett annat mått som ges av Henkin–Ramirez integralformel. I integralformeln integrerar vi med avseende på måttet $d\mu = \partial\rho \wedge (i\partial\bar{\partial}\rho)$. I strikt pseudokonvexa områden är detta mått ekvivalent med ytmåttet men för svagt pseudokonvexa områden gäller inte detta utan nära "platta" punkter är $d\mu$ strikt mindre än $d\sigma$. Därför sammanfaller inte $H^p(d\mu)$ och $H^p(d\sigma)$ för sådana områden. Henkin–Ramirez integralformel antyder också att när man skall studera H så är $d(z, \zeta) = |\partial\rho(\zeta) \cdot (z - \zeta)| + |\partial\rho(z) \cdot (\zeta - z)|$ en naturlig metrik på $\partial\Omega$.

I sin doktorsavhandling studerade Thomas Hansson (numera Wernstål) så kallade "teverutor", alltså modellområden av ändlig typ som ges av $D_m = \{z \in \mathbf{C}^n; \sum |z_i|^{2m_i} < 1\}$. Han visade att $d(\zeta, z)$ är en pseudometrik på ∂D_m. Med denna metrik utgör $(D_m, d, d\mu)$ ett homogent rum och singulariteten hos H passar in i teorin för singulära integraloperatorer. Med hjälp av $T1$-satsen bevisade han att Hf är en begränsad operator på $L^2(\partial D_m)$.

Litteraturhänvisningar

THOMAS HANSSON On Hardy spaces in complex ellipsoids
Annales de l'Institut Fourier **49** (1999) 1477–1501