NORDAN FEM

Voksenåsen i Oslo, 4-6 maj 2001

DEN første Nordan-konferansen utenfor Sverige ble arrangert av Oslo, med støtte fra Trondheim. Stedet var Voksenåsen kultur og konferansehotell – "Norges nasjonalgave til Sverige". Voksenåsen ligger idyllisk til med storslagen utsikt over Oslo. Det var gode muligheter for turer i skogen, blant annet til det nærliggende Tryvannstårnet. Noen av deltakerne besteg tårnet og mente å kunne skjelne Sverige i det fjerne. Konferansen ble vellykket og trivelig, ikke minst på grunn av et utmerket samarbeid med "Svenskhemmet". Velvillige sponsorer gjorde det mulig å støtte ikke-nordiske deltakere, og også å tilby litt ekstra hygge.

DELTAGARE

Mats Andersson (Göteborg)
Lars Alexandersson (Linköping)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jan Boman (Stockholm)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Stefan Borell (Sundsvall)
Hasse Carlsson (Göteborg)
Linus Carlsson (Umeå)
Urban Cegrell (Umeå)
Lars Filipsson (Västerås)
John Erik Fornæss (Ann Arbor)
Anders Fällström (Umeå)
Lars Hörmander (Lund)
Björn Ivarsson (Uppsala)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Robert Juhlin (Stockholm)
Frank Kutzschebauch (Uppsala)
Christoph Lampert (Göteborg)
Finnur Lárusson (London)
Oscar Lemmers (Amsterdam)
Niklas Lindholm (Göteborg)
Sam Lodin (Sundsvall)
Erik Løw (Oslo)
Jón Magnússon (Reykjavik)
Per Manne (Bergen)
Klas Markström (Umeå)
Evgeny Materov (Tübingen)
Christophe Mourougane (Paris)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Laurberg Pedersen (Köpenhamn)
Henrik Petersson (Växjö)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Bjarte Rom (Trondheim)
Hans Rullgård (Stockholm)
Timur Sadykov (Stockholm)
Sebastian Sandberg (Göteborg)
Gerd Schmalz (Bonn)
Kristian Seip (Trondheim)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Ragnar Sigurdsson (Reykjavik)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Alexander Ulanovskii (Stavanger)
Frank Wikström (Umeå)
Yang Xing (Umeå)
Per Åhag (Sundsvall)
Nils Øvrelid (Oslo)

[47 personer]

PROGRAM

Fredag 4 maj

16.00-16.45 Mikael Passare

Amoebas, Monge–Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope

17.15-18.00 Henrik Laurberg Pedersen

Pick functions related to entire functions having negative zeros

18.15-19.00 Niklas Lindholm

Sampling in complex analysis

Lördag 5 maj

09.00-09.45 Mats Andersson

Fundamental solutions to $\bar{\partial}$ in $\mathbf{C}^n$ and representation formulas with weights

10.00-10.45 Alexander Ulanovskii

On certain quasi-analytical properties of convolutions of measures

11.00-11.45 John Erik Fornæss

Attractors in complex dynamics

15.30-16.15 Finnur Lárusson

Abstract homotopy theory and Gromov's Oka principle

16.45-17.30 Frank Kutzschebauch

Embeddings and compact group actions on $\mathbf{C}^n$

17.45-18.30 Frank Wikström

Pluricomplex Green functions with multiple poles

Söndag 6 maj

09.00-09.45 Gerd Schmalz

Simultaneous linearization of the isotropic automorphisms of a CR manifold

10.00-10.45 Christophe Mourougane

Interpolation in non-positively curved Kähler manifolds

11.00-11.45 Björn Ivarsson

On the behaviour of strictly plurisubharmonic functions near real hypersurfaces

ARRANGÖRER

Erik Løw, Kristian Seip och Nils Øvrelid

FINANSIÄRER

Norges forskningsråd
Voksenåsen kultur og konferansehotell AS
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Universitetet i Oslo

Mikael Passare

Amöbor, Monge–Ampère-mått och trianguleringar av Newton-polytopen

Amöban $\mathcal{A}_f$ till en holomorf funktion f är per definition bilden i $\mathbf{R}^n$ av dess nollställemängd under den logaritmiska avbildningen Log: $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \ldots \log|z_n|)$. Denna terminologi infördes på nittiotalet av den berömde (biologen och) matematikern Israel Gelfand och hans medförfattare Mikhail Kapranov och Andrei Zelevinsky.

I detta föredrag låter vi $f \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ vara ett polynom, och vi betraktar den tillhörande Jensen–Ronkin-funktionen:

$$N_f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \log\bigl|f(z)\bigr| \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \log\bigl|f(e^{x+i\theta})\bigr|\, d\theta_1 \cdots d\theta_n .$$

Detta är en konvex funktion på $\mathbf{R}^n$ och dess gradient avbildar $\mathbf{R}^n$ in i Newton-polytopen Δ_f på ett sådant sätt att varje sammanhängande komponent av $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ avbildas på varsin heltalspunkt i $\Delta_f \cap \mathbf{Z}^n$ som kallas ordningen av denna komponent. Motsvarande Monge–Ampère-mått

$$\mu_f = \det\bigl[\partial^2 N_f / \partial x_j \partial x_k\bigr]$$

har alltså sitt stöd på amöban $\mathcal{A}_f$ och total massa lika med $\mathrm{Vol}\,\Delta_f$.

Eftersom N_f är lokalt affin på komplementet $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ så kan den där skrivas som $c_\alpha + \langle\alpha, x\rangle$, med α lika med ordningen för den aktuella komplementkomponenten och en reell konstant c_α. Om α är en hörnpunkt till Δ_f så gäller $c_\alpha = \log|a_\alpha|$, där a_α är koefficienten för monomet z^α i polynomet f, men i allmänhet beror c_α på alla koefficienter hos f. Om vi nu approximerar N_f med den styckvis linjära funktionen $\tilde{N}_f(x) = \max_\alpha\bigl(c_\alpha + \langle\alpha, x\rangle\bigr)$, och betraktar mängden $\mathcal{S}_f$ av alla punkter x i vilka $\tilde{N}$ inte är deriverbar, så får vi den så kallade ryggraden för amöban $\mathcal{A}_f$. Legendre-transformen av $\tilde{N}$ ger på motsvarande sätt upphov till en triangulering av Δ_f.

I fallet $n = 2$ gäller på amöban $\mathcal{A}_f$ olikheten $\mu_f \geq \lambda_n / \pi^2$, där λ_n betecknar Lebesguemåttet. Härur följer olikheten

$$\mathrm{Area}\,\mathcal{A}_f \leq \pi^2\, \mathrm{Area}\,\Delta_f .$$

Allt detta är ett gemensamt arbete med Hans Rullgård.

Litteraturhänvisning

MIKAEL PASSARE & HANS RULLGÅRD Amoebas, Monge–Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope *Duke Mathematical Journal* **121** (2004) 481–507

Henrik Laurberg Pedersen

Pick-funktioner relaterade till hela funktioner med negativa nollställen

Vid ett symposium om ortogonala polynom och speciella funktioner, som ägde rum 1999 i den grekiska staden Patras, framförde Dimitar Dimitrov en förmodan rörande funktionen

$$f(x) = \frac{\log \Gamma(x+1)}{x \log x}, \quad x > 0,$$

nämligen att f skulle ha en fullständigt monoton derivata, det vill säga att den skulle uppfylla olikheterna $f^{(2k-1)}(x) > 0$ och $f^{(2k)} < 0$ för alla $k \geq 1$. Det var sedan tidigare bevisat att f är växande och konkav.

Funktionen f uppträder i studiet av det asymptotiska uppförandet hos Lebesguemåttet av det n-dimensionella enhetsklotet. Jag ska kortfattat redogöra för hur vi i ett gemensamt arbete med Christian Berg verifierade Dimitrovs förmodan, och jag kommer också att presentera en generalisering av resultatet till en särskild klass av funktioner med enbart negativa nollställen. I bevisen används metoder från komplexanalys: det visar sig att lämpliga holomorfa utvidgningar av funktionen f (eller någon funktion från en viss klass) är en Pick-funktion (dvs har ickenegativ imaginärdel i det övre halvplanet). Varje Pick-funktion kan framställas som en integral. Från den motsvarande integralrepresentationen får man som en följdsats att f har en fullständigt monoton derivata.

Litteraturhänvisning

CHRISTIAN BERG & HENRIK LAURBERG PEDERSEN Pick functions related to the gamma function . *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* **32** (2002) 507–525

Niklas Lindholm

Sampling i komplex analys

En familj $\{\varphi_j\}$ i ett Hilbert-rum kallas för en ram (eng. *frame*) om

$$A\|f\|^2 \leq \sum |(f, \varphi_j)|^2 \leq B\|f\|^2$$

för alla funktioner f. (Detta betyder att man med funktionerna φ_j kan reproducera f på ett numeriskt stabilt sätt.) Det är välkänt att ramar är intimt relaterade till sampling. Om exempelvis $\varphi_j = e^{-i\gamma_j}$ i rummet $L^2(\mathbf{R})$ så övergår ramolikheten via Fourier-transformation till en samplingsolikhet

$$\|f\|^2 \sim \sum |f(\gamma_j)|^2.$$

I det generaliserade Fock-rummet, som består av hela funktioner i $\mathbf{C}$ med vikten $e^{-\varphi}$ där φ är en subharmonsik funktion, har Bo Berndtson, Joaqium Ortega-Cerdà och Kristian Seip lyckats karaktärisera samplingssekvenserna för vikter sådana att $m \leq \Delta\varphi \leq M$. Beskrivningen bygger på ett täthetsvillkor av Beurling-Malliavins typ, innehållande $\Delta\varphi$. Intuitivt sett är nämligen svårigheten vid sampling att fånga funktioner som är lokalt stora. Samplingssekvensen Γ måste i någon mening vara tät överallt.

I $\mathbf{C}^n$ inser man snabbt, genom att betrakta punktföljder som är produkter av följder i $\mathbf{C}$, att täthetsvillkoret måste innehålla Monge-Ampère-massan $i\partial\bar{\partial}\varphi$ istället för $\Delta\varphi$, och att ett täthetsvillkor aldrig ensamt kan utgöra ett tillräckligt villkor.

Ett sätt att fånga lokalt stora funktioner är genom koncentrationsoperatorn $T_\Omega f = P_\varphi(\chi_\Omega f)$ där f restringeras till den begränsade mängden Ω och resultatet projiceras tillbaka till Fock-rummet med hjälp av Bergman-kärnan B_φ. Fördelningen av egenvärdena till denna kompakta operator har implikationer för tätheten hos samplingssekvenser, något som använts av Henry Landau för att studera samplingssekvenser för bandbegränsade funktioner i $\mathbf{R}^n$.

För att studera egenvärdena hos operatorn T_Ω visar vi att om φ är en plurisubharmonisk funktion av klass C^2 i $\mathbf{C}^n$ sådan att $i\partial\bar{\partial}\varphi \sim i\partial\bar{\partial}|z|^2$ så har vi att

$$\tau^{-n} B_{\tau\varphi}(z,z) e^{-\tau\varphi(z)} dm(z) \to (i\partial\bar{\partial}\varphi)^n(z) / \left[(2\pi)^n n!\right], \qquad \tau \to \infty.$$

Utgående från detta kan vi sedan visa att om φ är en plurisubharmonisk funktion av detta slag och Γ är en samplingssekvens för Fock-rummet så måste Γ vara en ändlig union av likformigt separerade följder (trivialt) och dessutom innehålla en delföljd Γ' med asymptotisk täthet

$$\liminf_{r\to\infty} \inf_{z\in\mathbf{C}^n} \frac{\#\Gamma' \cap B(z;r)}{\int_{B(z;r)} (i\partial\bar{\partial}\varphi)^n} \geq \frac{1}{(2\pi)^n n!}.$$

Då $n = 1$ är detta täthetsvillkor samma som tidigare (men vi har inte lyckats visa att olikheten även här är strikt).

Litteraturhänvisning

NIKLAS LINDHOLM Sampling in weighted L^p spaces of entire functions in $\mathbf{C}^n$ and estimates of the Bergman kernel *Journal of Functional Analysis* **182** (2001) 390–426

Mats Andersson

Fundamentallösningar till $\bar{\partial}$ i $\mathbf{C}^n$ och representationsformler med vikter

Låt δ_{z-a} beteckna inre multiplikation med vektorfältet

$$2\pi i \sum_1^n (z_j - a_j)\frac{\partial}{\partial z_j}$$

och betrakta en strömlösning $u = u_{n,n-1} + \cdots + u_{1,0}$ (där $u_{k,k-1}$ är en $(k,k-1)$-ström) till

$$(\delta_{z-a} - \bar{\partial})u = 1 - [a], \tag{1}$$

där $[a]$ betecknar (n,n)-strömmen punktevaluering i $a \in \mathbf{C}^n$. I en variabel är Cauchykärnan

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z-a}$$

den enda möjliga lösningen, men i högre dimensioner finns många val. Varje lösning till (1) ger upphov till en generaliserad Cauchy–Fantappiè–Leray-formel. Vi kommer att beskriva en rätt allmän metod att bilda viktade representationsformler med utgångspunkt från lösningar till (1). Genom att istället välja ett vektorfält som är noll till första ordningen på diagonalen i ett produktområde, eller produktmångfald, ger samma metod viktade formler för $\bar{\partial}$.

Man kan på ett naturligt sätt definiera Fourier-transformer av former och strömmar i $\mathbf{C}^n$, och det visar sig att Fourier-transformen av en lösning till (1) med $a = 0$ också är en lösning till väsentligen samma ekvation. Vi kommer att antyda en tillämpning av detta på icke-holomorf multivariabel operatorkalkyl.

Litteraturhänvisningar

MATS ANDERSSON Integral representation with weights I *Mathematische Annalen* **326** (2003) 1–18

MATS ANDERSSON (Ultra)differentiable functional calculus and current extension of the resolvent mapping *Annales de l'Institut Fourier* **53** (2003) 903–926

Alexander Ulanovskii

Om vissa kvasianalytiska egenskaper hos faltningar av mått

Avsikten med föredraget är att presentera två olika icke-klassiska egenskaper rörande kvasianalyticitet. Vi ska också diskutera sambandet mellan dessa egenskaper och några problem och resultat i komplex och harmonisk analys.

I det ena fallet behandlar vi entydighet för Borel-mått. Följande fråga ställdes av Andrej Kolmogorov på 60-talet: Anta att ett oändligt delbart sannolikhetsmått μ överensstämmer med det normala måttet Φ på på någon halvlinje $(-\infty, a)$. Gäller då $\mu = \Phi$? År 1977 visade Ildar Ibragimov att svaret är "ja", och att varje sådan halvlinje $(-\infty, a)$ i själva verket är en entydighetsmängd för en viss delklass av oändligt delbara sannolihetsmått. (Det vill säga om två mått från delklassen sammanfaller på den aktuella mängden så är de båda måtten identiska.) Det har sedemera visat sig att sådana resultat är rent analytiska till sin natur. Vi kommer att presentera resultat om klasser av Borelmått som är entydigt bestämda av sina restriktioner till vissa massiva delmängder. Vi påvisar särskilt hur våra resultat har kopplingar till värdefördelningsteori, till delbarhet hos kvasipolynom, till faktorisering i Hardy-rum samt till satser om tillväxt och avtagande hos analytiska funktioner.

Det andra fallet går tillbaka på ett resultat av Henry Landau från 1964. Han visade att signaler (= hela funktioner av ändlig exponentiell typ på reella axeln) med en särskild spektralstruktur kan återskapas från glesa samplingsföljder. Vi kommer att presentera några utvidgningar av detta fenomen och vi diskuterar sambandet med följande problem: Beskriv alla genererande följder för rummet $L^p(\mathbf{R})$, $p \geq 1$, det vill säga reella talföljder Λ för vilka det existerar en funktion $\varphi \in L^p(\mathbf{R})$ sådan att dess Λ-translat $\{\varphi(\cdot - \lambda)\}$, $\lambda \in \Lambda$, spänner upp $L^p(\mathbf{R})$. Vi visar också att detta senare problem är nära förknippat med en viss kvasianalytisk egenskap.

Litteraturhänvisningar

ALEXANDER ULANOVSKII On the determination of a measure by the restriction of its n-fold convolutions to a massive set
Journal of Mathematical Sciences **77** (1995) 2997–3002

ALEXANDER ULANOVSKII On Landau's phenomenon in $\mathbf{R}^n$
Mathematica Scandinavica **88** (2001) 72–78

John Erik Fornæss

Attraktorer i komplex dynamik

Attraktorer spelar en viktig roll inom dynamik. De enklaste exemplen är attraherande fixpunkter (eller periodiska punkter). Det är av intresse att undersöka attraktorer som har utsträckning i rummet. I detta fall har tyngdpunkten legat på att undersöka detaljerna kring de dynamiska egenskaperna inuti attraktorn. Exempel på detta är Hénon-attraktorer och Lorentz-attraktorer. Man kan även studera attraktorer med rumslig utsträckning, men utan att ta hänsyn till dynamiken inuti attraktorn. Det väsentliga studieobjektet är då attraktorns attraktionsområde.

Vi betraktar komplexa Hénon-avbildningar på $\mathbf{C}^2$. Dessa är mycket väl utforskade genom arbeten av Eric Bedford, John Smillie och andra. Det rör sig om avbildningar av formen $H(z,w) = (P(z) + aw, z)$ eller sammansättningar av ändligt många sådana. Här betecknar P ett polynom av grad ≥ 2.

Till varje Hénon-avbildning hör naturligt ett mått μ. För att definiera detta mått inför man

$$G^+ = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \log^+ \|H^n(z,w)\|,$$

där d är graden hos P och H^n betecknar den n-faldiga sammansättningen $H \circ \ldots \circ H$. På motsvarande sätt fås G^- med hjälp av den inversa avbildningen H^{-1}. Måttet μ definieras nu som produkten $dd^cG^+ \wedge dd^cG^-$.

Vi låter J beteckna stödet för måttet μ. Då är J en kompakt mängd på vilken avbildningen H uppför sig kaotiskt. Givet två punkter $p, q \in J$ ställer vi frågan huruvida banorna $\{H^n(p)\}$, $\{H^n(q)\}$ kommer godtyckligt nära varandra, det vill säga om $\inf_n d(H^n(p), H^n(q)) = 0$. Ifall p och q är två skilda fixpunkter så är detta inte fallet. Kopplingen till ordet attraktor fås genom att tänka på p som en punkt vid vilken q "fastnar" om den kommer tillräckligt nära. Vårt huvudresultat är att för nästan alla punkter p med avseende på μ så kommer varje q i J godtyckligt nära p.

Detta är ett gemensamt arbete med Araceli Bonifant. Det vore intressant att bevisa motsvarande resultat också för reella Hénon-avbildningar $H\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

Litteraturhänvisning

ARACELI BONIFANT & JOHN ERIK FORNÆSS Attractors *Complex geometry (Göttingen, 2000), 73–84, Springer, Berlin,* (2002)

Finnur Lárusson

Abstrakt homotopiteori och Gromovs Oka-princip

Abstrakt homotopiteori äger rum i en kategori som uppfyller Daniel Quillens axiom, och handlar om att ge en uppfattning om när två pilar är homotopa. Detta sammanbinder ordinär homotopiteori av topologiska rum och simpliciella mängder, homologisk algebra, och mycket mer. Inte minst har nya tillämpningar inom aritmetisk geometri på senare tid tilldragit sig stort intresse.

Oka-principen är ett viktigt tema i komplex analys med en lång historia. Sammanfattningsvis säger den att på en komplex mångfald i det euklidiska rummet så finns det endast topologiska obstruktioner för lösbarhet av analytiska problem av kohomologisk karaktär. En berömd sats av Mikhail Gromov ger tillräckliga villkor för att en kontinuerlig avbildning mellan två komplexa mångfalder ska vara homotop med en holomorf avbildning.

Föredraget kommer ge en kortfattad överblick av dessa två ämnen och beskriva vad Gromovs Oka-princip får för innebörd inom homotopiteorin tolkad i rent holomorfa termer, utan referens till kontinuerliga funktioner. Vi betraktar hela tiden kategorin av komplexa mångfalder inbäddad i en Quillen-kategori, där vi då kan applicera homotopiteorin. Slutsatsen av Gromovs sats visar sig vara ekvivalent med en egenskap kallad excision, som är bekant från topologi och nuförtiden ofta uppträder i algebraisk geometri.

Litteraturhänvisning

FINNUR LÁRUSSON Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov's Oka principle *International Journal of Mathematics* **14** (2003) 191–209

Frank Kutzschebauch

Inbäddningar och kompakt gruppverkan på $\mathbf{C}^n$

Vi betraktar propra holomorfa inbäddningar $\varphi\colon \mathbf{C}^k \hookrightarrow \mathbf{C}^n$ $(0 < k < n)$ upp till ekvivalens under holomorfa automorfier (banor med avseende på den naturliga verkan av $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^n) \times \mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^n)$). Vi betraktar också holomorf verkan av kompakta grupper på $\mathbf{C}^n$ upp till ekvivalens given av konjugering inuti gruppen av holomorfa automorfier $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^n)$. Det primära målet med föredraget är att förklara hur man går från icke-ekvivalenta inbäddningar till icke-ekvivalent verkan (en metod utvecklad tillsammans med Harm Derksen för att lösa det holomorfa linjäriseringsproblemet). Mer konkret så ger vi en kort bevisskiss av följande resultat.

För alla kompakta Lie-grupper K finns en dimension N (beroende på gruppen) så att på rummet $\mathbf{C}^L$, $L \geq K$, finns en icke linjäriserbar holomorf verkan av gruppen K.

Detta ger alltså en negativ lösning till det holomorfa linjäriseringsproblemet formulerat till exempel i den sjätte komplexanalytiska volymen "*Complex manifolds*" av Springers matematiska encyklopedi.

Jag diskuterar även några positiva resultat rörande holomorf linjärisering, dels av Patrick Ahern och Walter Rudin, dels av mig tillsammans med Hanspeter Kraft. Samme Kraft har för övrigt publicerat en fin översikt av problem relaterade till automorfigruppen av det komplexa euklidiska rummet, se Bourbaki-seminariet 1994/95.

Litteraturhänvisningar

HARM DERKSEN & FRANK KUTZSCHEBAUCH Global holomorphic linearization of actions of compact Lie groups on $\mathbf{C}^n$ *Contemporary Mathematics* **222** (1997) 201–210

HARM DERKSEN & FRANK KUTZSCHEBAUCH Nonlinearizable holomorphic group actions *Mathematische Annalen* **311** (1998) 41–53

Frank Wikström

Plurikomplexa Green-funktioner med multipla poler

Den plurikomplexa Green-funktionen med multipla poler infördes av Pierre Lelong år 1989, men den rönte ingen större uppmärksamhet tills för några år sedan. Jag kommer att tala om en del egenskaper hos denna funktion samt berätta något om vad som är känt och vad som ännu är öppna problem.

Låt Ω vara ett område i $\mathbf{C}^n$ och låt $\nu\colon \Omega \to \mathbf{R}_+$ vara en funktion med stöd på en ändlig mängd. Vi betecknar med $\mathcal{L}_\nu$ mängden av negativa plurisubharmoniska funktioner på Ω med logaritmisk pol av vikt $\geq \nu(w)$ i varje punkt $w \in \Omega$. Den tillhörande plurikomplexa Green-funktionen definieras som

$$g(z;\nu) = \sup\{u(z); u \in \mathcal{L}_\nu\}.$$

Anta nu att $\nu = \nu_1 w_1 + \ldots + \nu_p w_p$ och låt $\phi\colon \mathbf{D} \to \Omega$ vara en analytisk skiva med $\phi(0) = z$ och $\phi(\sigma_j) = \nu_j$. Man inser enkelt att $g(z;\nu) \leq \sum_j \nu_j \log|\sigma_j|$ och det är naturligt att införa den så kallade Lempert-funktionen

$$\delta(z;\nu) = \inf_\phi \sum_j \nu_j \log|\sigma_j|,$$

där infimum tas över alla analytiska skivor som innehåller stödet för ν. Om ν antas vara heltalsvärd kan vi få en nedre begränsning för g genom att införa Carathéodory-funktionen

$$\delta^*(z;\nu) = \sup\{\log|f(z)|; f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbf{D}),\ \mathrm{ord}_f \geq \nu\},$$

där ord_f står för nollställeordningen hos f. László Lemperts berömda resultat om invarianta metriker i konvexa områden implicerar att $\delta^*(z;w) = g(z;w) = \delta(z;w)$ för konvexa Ω. Det är frestande att förmoda att något liknande skulle gälla också för den plurikomplexa Green-funktionen med multipla poler, men det finns motexempel som visar att $\delta(z;\nu) \neq g(z;\nu)$ i allmänhet.

I detta föredrag behandlas kvalitativa och kvantitativa egenskaper hos g, δ och δ^*. Exempelvis beskriver vi mängder där dessa funktioner uppför sig linjärt, alltså de punkter z för vilka $\delta(z;\nu_1 w_1 + \nu_2 w_2) = \nu_1\delta(z;w_1) + \nu_2\delta(z;w_2)$. Dessutom diskuterar vi fenomenet med "osynliga" poler, det vill säga att $\delta(z;w) = \delta(z;w + \nu w')$ för vissa val av z, w, w' och ν (och motsvarande resultat för g och δ^*). Vi presenterar också numeriskt material som starkt tyder på att de tre funktionerna sammanfaller i bidisken i fallet med två poler av lika vikt.

Litteraturhänvisning

Frank Wikström Computing the pluricomplex Green function with two poles
Experimental Mathematics **12** (2003) 375–384

Gerd Schmalz

Samtidig linjärisering av de isotropa automorfierna av en CR-mångfald

Låt M vara en inbäddad reellanalytisk mångfald. Låt $\mathrm{Aut}_p M$ beteckna isotropigruppen, det vill säga gruppen av groddar av avbildningar som är biholomorfa i p och bevarar M och p. Denna grupp är en CR-invariant för M i punkten p. Det är ett naturligt problem att försöka klassificera groddar av CR-mångfalder med stora isotropigrupper, och också att beskriva $\mathrm{Aut}_p M$. En automorfi $\phi \in \mathrm{Aut}_p M$ sägs vara linjäriserbar om det finns holomorfa koordinater i en omgivning till p i det omgivande rummet sådana att ϕ är en linjär avbildning. Vi säger att isotropa avbildningar är samtidigt linjäriserbara om det finns holomorfa koordinater i en omgivning till p så att alla $\phi \in \mathrm{Aut}_p M$ är linjära avbildningar.

Samtidig linjäriserbarhet implicerar att isotropigruppen inte är "för stor". Faktum är att ett nödvändigt villkor för linjäriserbarhet, även i fallet med en automorfi ϕ, är att ϕ bestäms av sina förstaderivator i punkten p. Att visa att automorfier av en given klass av mångfalder (om vi bortser från de mest symmetriska objekten) är bestämda av dess förstaderivator är det svåraste steget för att få fram linjäriserbarhetsresultat. Det baseras på analys av verkan av (infinitesimala) biholomorfa avbildningar på ekvationerna för CR-mångfalderna i normalform. Nästa steg bygger på att varje isotrop automorfi av en CR-mångfald i normalform, som bevarar en så kallad kedja, har en enkel algebraisk form som kan reduceras till en linjär avbildning. Att en sådan invariant kedja existerar kan visas genom att analysera den linjära verkan av derivatan av avbildningen i punkten p på tangentrummet $T_p M$.

Enligt ett resultat av Shiing-shen Chern och Jürgen Moser (som generaliserats till högre kodimension av Valerii Beloshapka) så gäller att om M är Levi icke-degenererad i punkten p så är varje isotrop automorfi entydigt bestämd av sina första- och andraderivator i p. Beloshapka visade tillsammans med Alexander Loboda att de isotropa automorfierna av en icke-kvadratisk hyperyta M är bestämda av sina förstaderivator i punkten p. För strikt pseudokonvexa hyperytor kan man hitta normala koordinater sådana att alla automorfier är linjära avbildningar.

För CR-mångfalder av högre kodimension $k > 1$ är följande resultat kända: För hyperboliska, icke-semikvadratiska och elliptiska, icke-exceptionella mångfalder av kodimension två i $\mathbf{C}^4$ kan de isotropa automorfierna samtidigt linjäriseras. Samma sak är gäller för så kallade rigida CR-mångfalder (allmän position för $3 \geq k \geq n^2 - 3$ med $n = \text{CR-dim}\, M$).

Litteraturhänvisning

VLADIMIR EZHOV & GERD SCHMALZ Linearization of isotropic automorphisms of non-quadratic elliptic CR-manifolds in $\mathbf{C}^4$ *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, 89–103, Springer, Berlin* (2003).

Christophe Mourougane

Interpolation i icke-positivt krökta Kähler-mångfalder

Låt (X, ω) vara en Kähler-mångfald med en holomorf hermitsk linjebunt $(L, h) \to X$ och en diskret punktmängd $\Lambda \subset X$. Det tillhörande Fock-rummet $\mathcal{F}_{\omega,h}$ består av globala holomorfa sektioner f till L sådana att

$$\int_X \|f\|_h^2 \, dV_\omega < \infty \,.$$

Vi betraktar även Hilbert-rummet $\ell^2_{\Lambda,h}$ bestående av alla komplexa följder $\{a_\lambda\}$ med

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\|_h^2 < \infty \,,$$

och vi säger att mängden Λ är *interpolerande* för rummet $\mathcal{F}_{\omega,h}$ om det för varje $\{a_\lambda\}$ i $\ell^2_{\Lambda,h}$ finns en sektion $f \in \mathcal{F}_{\omega,h}$ med $f(\lambda) = a_\lambda$ för alla $\lambda \in \Lambda$.

I fallet $X = \mathbf{C}$ med den triviala linjebunten försedd med hermitsk metrik $h = |\ |^2 e^{-\Phi}$, sådan att $\Delta\Phi$ är positiv och likformigt begränsad, har Bo Berndtsson, Joaquim Ortega-Cerdà och Kristian Seip gett en karakterisering av interpolerande mängder. Vi presenterar här ett tillräckligt villkor i ett betydligt allmännare fall.

Vi antar att (X, ω) har icke-positiv sektionskrökning nedåt begränsad av $-4k^2$, och att (L, h) är vad vi kallar nästan analytisk kring mängden Λ. Följande två villkor är då (tillsammans) tillräckliga för att Λ ska vara interpolerande för $\mathcal{F}_{\omega,h}$:

(i) $$\inf_{\lambda,\mu \in \Lambda;\, \lambda \neq \mu} d_\omega(\lambda, \mu) > 0 \,,$$

(ii) $$i\, c_h(L) + i\, \mathrm{Ric}(\omega) \geq \dim_{\mathbf{C}}(X) \, \frac{\#\{B_\omega(z,\rho) \cap \Lambda\}}{\rho^2} \, (1 + |k|\rho \coth(|k|\rho))\, \omega + \varepsilon\, \omega \,,$$

för tillräckligt små $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$, och för alla $z \in X$. Här står $\mathrm{Ric}(\omega)$ för Ricci-krökningen hos ω. Även för $X = \mathbf{C}$ har detta resultat nyhetsvärde eftersom vi tillåter allmännare vikter än sådana som är jämförbara med $|z|^2$. För beviset använder vi fämst L^2-uppskattningar och en jämförelsesats för Hesse-matriser i Kähler-geometri.

Litteraturhänvisning

CHRISTOPHE MOUROUGANE Interpolation in non-positively curved Kähler manifolds
The Journal of Geometric Analysis **13** (2003) 173–183

Björn Ivarsson

Om uppförandet hos strikt plurisubharmoniska funktioner nära reella hyperytor

I hyperkonvexa områden Ω kan hitta en plurisubharmonisk funktion ρ sådan att $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n;\ \rho(z) < 0\}$. En sådan funktion kallas för en definierande funktion. Zbigniew Błocki har visat att man kan hitta en slät definierande plurisubharmonisk funktion ρ sådan att $M\rho = \det(\rho_{j\bar{k}}) \geq 1$ i hyperkonvexa områden. Om man kan hitta en slät definierande funktion som är globalt Lipschitz och uppfyller $M\rho \geq 1$ då får man även en plurisubharmonisk lösning som är Lipschitz till problemet

$$\begin{cases} Mu = f(z, u(z)) & \text{i } \Omega, \\ \lim_{z \to z_0} u(z) = 0 & \text{för alla } z_0 \in \partial\Omega, \end{cases}$$

där $f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ är en strikt positiv funktion som är växande i u-variabeln.

Det vore således önskvärt att kunna avgöra när man kan hitta en slät definierande plurisubharmonisk funktion som är Lipschitz och uppfyller $M\rho \geq 1$. I ett strikt pseudokonvext begränsat område med slät rand kan man hitta en sådan funktion. Vad händer i ett område som inte är strikt pseudokonvext? Genom att studera lösningar till specialfallet $f \equiv 1$ och $\Omega = \Omega_{(a_1,\ldots,a_n)} = \{z \in \mathbf{C}^n; \sum_{j=1}^n (|z_j|^2/a_j^2) < 1\}$ kan man ge ett partiellt svar på denna fråga. Man finner att detta speciella problem har den explicita lösningen

$$u_a = ((\sum_{j=1}^n |z_j|^2/a_j^2) - 1) \prod_{j=1}^n a_j^{2/n}, \text{ med } \frac{\partial u_a}{\partial z_1}(a_1, 0, \ldots, 0) = \frac{\partial u_a}{\partial \bar{z}_1}(a_1, 0, \ldots, 0) = a_1^{-1} \prod_{j=1}^n a_j^{2/n}.$$

Man kan sedan utnyttja u_a för att visa att polydisken $\mathbf{D}^n$, $n \geq 3$, saknar definierande plurisubharmonisk funktion ρ som är globalt Lipschitz och uppfyller $M\rho \geq 1$. Från maximumprincipen fås att $\rho(z) \leq u_a(z_1 - (1 - a_1), z_2, \ldots, z_n)$ i $\Omega_a + (1 - a_1, 0, \ldots, 0)$. Därför är $\lim_{x \to 1-} (\rho(1, 0, \ldots, 0) - \rho(x, 0, \ldots, 0))/(1 - x) \geq 2a_1^{-1} \prod_{j=1}^n a_j^{2/n}$. Om man låter a_1 gå mot 0 så ser man nu att ρ inte kan vara globalt Lipschitz. Här kan vi fixera $a_2, \ldots, a_n$ och genomföra argumentet eftersom randen till polydisken är platt i $(1, 0, \ldots, 0)$. Genom att låta $a_2, \ldots, a_n$ variera kan man få samma resultat för områden vars rand inte är platt.

Vi använder begreppet kontaktordning hos en holomorf kurva γ relativt en hyperyta M för att formulera ett sådant allmännare resultat. Kontaktordningen mellan M och γ i punkten $p \in M$ är ℓ om $d_M(q) \leq Cd(p, q)^\ell$ nära p och ℓ är det största tal för vilket olikheten gäller. Anta att man kan hitta två komplexa kurvor γ_1 och γ_2 utanför Ω, sådana att de har kontaktordning högre än 2 med $\partial\Omega$ och så att γ_1' och γ_2' är linjärt oberoende. Då kan vi visa att Ω inte har en plurisubharmonisk definierande funktion ρ som är globalt Lipschitz och uppfyller $M\rho \geq 1$.

Litteraturhänvisning

Björn Ivarsson On the behavior of strictly plurisubharmonic functions near real hypersurfaces *Arkiv för matematik* **45** (2007) ?–?