NORDAN SEX

Oddi i Reykjavík, 8-10 mars 2002

FYRSTA Norðan-ráðstefnan utan Skandinavíu fór fram undir rísandi síðvetrarsól á gamla Fróni. Norðanvindur skók ráðstefnugesti er þeir stigu úr loftförum sínum, en frost og kuldi gleymdust fljótt í yl Bláa lónsins. Fyrirlestrar voru haldnir í Háskóla Íslands, nánar tiltekið í Odda, en þátttakendur dvöldu í góðu yfirlæti á Hótel Sögu. Þó svo stærðfræðin skipaði öndvegi þessa daga, þá fundu menn sér stund til að heimsækja Stofnun Árna Magnússonar og berja þar augum forn skinnhandrit sem ein geyma veigamikla þætti úr sögu Norðurlanda.

DELTAGARE

Reynir Axelsson (Reykjavik)
Ulf Backlund (Umeå)
Robert Berman (Göteborg)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Stefan Borell (Sundsvall)
Alexander Brudnyi (Calgary)
Urban Cegrell (Umeå)
Alicia Dickenstein (Buenos Aires)
Peter Ebenfelt (San Diego)
Tomas Edlund (Uppsala)
Sergey Favorov (Charkov)
Lars Filipsson (Västerås)
Andreas Hartmann (Trondheim)
Torsten Hefer (Bonn)
Lars Hörmander (Lund)
Marius Irgens (Ann Arbor)
David Jacquet (Stockholm)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Frank Kutzschebauch (Sundsvall)
Christoph Lampert (Bonn)
Finnur Lárusson (London)
Oscar Lemmers (Sundsvall)
Norman Levenberg (Auckland)
Niklas Lindholm (Paris)
Sam Lodin (Sundsvall)
Erik Løw (Oslo)
Yurii Lyubarskii (Trondheim)
Jón Magnússon (Reykjavik)
Eugenia Malinnikova (Trondheim)
Francine Meylan (Fribourg)
Joaquim Ortega–Cerdà (Barcelona)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Laurberg Pedersen (Köpenhamn)
Henrik Petersson (Växjö)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Stéphane Rigat (Marseille)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Bjarte Rom (Trondheim)
Hans Rullgård (Stockholm)
Timur Sadykov (Stockholm)
Håkan Samuelsson (Göteborg)
Georg Schumacher (Marburg)
Kristian Seip (Trondheim)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Ragnar Sigurdsson (Reykjavik)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Frank Wikström (Umeå)
Yang Xing (Umeå)
Per Åhag (Sundsvall)

[50 personer]

PROGRAM

Lördag 9 mars

09.00-09.45 Lars Hörmander *L^2 methods in the theory of functions of several complex variables*
10.15-11.00 Alexander Rashkovskii *Newton polyhedra and Monge–Ampère operators*
11.15-12.00 Georg Schumacher *Analytic theory of moduli spaces*
14.00-14.45 Burglind Juhl–Jöricke *Some remarks on a class of multi-sheeted envelopes of holomorphy*
15.00-15.45 Timur Sadykov *Hypergeometric functions in several complex variables*
16.15-17.00 Kristian Seip *Extremal functions as divisors for kernels of Toeplitz operators*

Söndag 10 mars

09.00-09.45 Peter Ebenfelt *Rigidity of CR embeddings into spheres*
10.15-11.00 Norman Levenberg *Countability via capacity*
11.15-12.00 Alexander Brudnyi *Bounded analytic functions on special Riemann surfaces*
14.00-14.45 Alicia Dickenstein *Binomial residues*
15.00-15.45 Stéphane Rigat *Connection between the Fantappiè transform and the complex Cauchy problem*
16.15-17.00 Bo Berndtsson *The eigenvalue distribution of the $\bar{\partial}$ Laplacian*

ARRANGÖRER

Finnur Lárusson, Jón Magnússon och Ragnar Sigurðsson

FINANSIÄRER

Háskóla Íslands
Menntamálaráðuneyti Íslands

Lars Hörmander

L^2-metoder i teorin för funktioner av flera komplexa variabler

Inom teorin för analytiska funktioner av en komplex varabel har studiet av Laplace-operatorn Δ och Cauchy–Riemann-operatorn $\partial/\partial\bar{z}$ alltid spelat en central roll. En första teori för funktioner av flera komplexa variabler utvecklades däremot med hjälp av induktiva procedurer utgående från envariabelfallet. Det var inte förrän på 1960-talet som ett alternativt och kompletterande angreppssätt möjliggjordes genom användning av metoder från teorin för partiella differentialekvationer. Avsikten med föredraget är att presentera en historisk översikt över denna utveckling.

Vi påminner först om Hodge-teorin för harmoniska former och de Rhams sats som utgjorde startpunkten för den allmänna teorin. De analytiska grundvalarna för Hodge-teorin var ett tag en smula skakiga men omkring 1940 var teorin väletablerad på kompakta mångfalder utan rand. En utvidgning till kompakta mångfalder med rand genomfördes under det tidiga 1950-talet. Sett så här i efterhand krävde denna analys egentligen bara rätt klassiska verktyg från studiet av randvärdesproblem för Laplace-operatorn, men den stimulerade till en systematisk kodifiering av teorin för elliptiska randvärdesproblem som kom att fullbordas under 1950-talets lopp.

Redan 1922 hade Stefan Bergman infört den reproducerande kärnan för holomorfa funktioner som nu bär hans namn. Den är lika lätt att definiera för funktioner av flera variabler som i det endimensionella fallet. Med tanke på dess koppling till konform avbildning och andra tillämpningar i det endimensionella fallet var det kanske naturligt att ta den till utgångspunkt för ett analytiskt angrepp på Cauchy–Riemann-ekvationerna i flera variabler. Vi ska ta upp några sådana försök, för även om de misslyckades tycks de ha lett Donald Spencer till att formulera det fundamentala $\bar{\partial}$-Neumann-problemet kring mitten av 1950-talet.

Lösningen av $\bar{\partial}$-Neumann-problemet krävde att nya redskap utvecklades inom teorin för partiella differentialekvationer. Det var under perioden 1958 till 1964 som de grundläggande resultaten ordentligt bevisades efter vissa bakslag längs vägen. Som exempel på utvecklingen efter 1964 kommer vi huvudsakligen att ta upp existenssatser som följer från studiet av $\bar{\partial}$-Neumann-problemet.

Litteraturhänvisning

Lars Hörmander A history of existence theorems for the Cauchy–Riemann complex in L^2 spaces *The Journal of Geometric Analysis* **13** (2003) 329–357

Alexander Rashkovskii

Newton-polyedrar och Monge–Ampère-operatorer

En berömd sats av Anatolii Kushnirenko ger en uppskattning av multipliciteten hos ett isolerat nollställe x för en ekvidimensionell holomorf avbildning $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ i termer av dess Newton-polyeder $\Gamma_{f,x}$. I fallet då f är en polynomiell avbildning ger satsen en uppskattning av det totala antalet nollställen (räknade med multipliciteter) i termer av en annan Newton-polyeder $\Gamma_{f,\infty}$. Mer precisa versioner (som formuleras med hjälp av de blandade volymerna av Newton-poyedrarna för komponenterna till f) har bevisats av David Bernstein.

Traditionellt har studiet och tillämpningarna av Newton-polyedrar huvudsakligen inbegripit algebraiska eller analytiska tekniker. Här presenterar vi istället ett tillvägagångssätt som bygger på pluripotentialteori, det vill säga på metoder som bygger på användning av plurisubharmoniska funktioner och Monge–Ampère-operatorer. Vi visar att Newton-polyedrar i själva verket är högst naturliga objekt inom pluripotentialteorin, såsom varande duala till vissa tillväxtkarakteristika för plurisubharmoniska funktioner. Den konvexa bilden av den lokala indikatorn $\log|f|$ i punkten x är exempelvis inget annat än stödfunktionen för Newton-polyedern $\Gamma_{f,x}$, och Monge–Ampère-massan för indikatorn är lika med $n!\,\mathrm{Vol}(\mathbf{R}^n_+ \setminus \Gamma_{f,x})$.

Tillsammans med vissa jämförelsesatser för Monge–Ampère-operatorer tillåter oss denna nya metod inte bara att reproducera Kushnirenkos och Bernsteins satser (och att anknyta dem till andra resultat såsom Bezouts och Tsikh–Yuzhakovs satser) utan också att bevisa generaliseringar av dem för allmänna plurisubharmoniska funktioner.

Litteraturhänvisningar

ALEXANDER RASHKOVSKII Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions *Annales Polonici Mathematici* **75** (2000) 213–231

ALEXANDER RASHKOVSKII Indicators for plurisubharmonic functions of logarithmic growth *Indiana University Mathematics Journal* **50** (2001) 1433–1446

ALEXANDER RASHKOVSKII Total masses of mixed Monge–Ampère currents *The Michigan Mathematical Journal* **51** (2003) 169–186

Georg Schumacher

Analytisk teori för modulirum

Vi ger en översikt över aktuella resultat rörande den analytiska teorin för modulirum. Det huvudsakliga syftet är att konstruera en naturlig Kähler-metrik (som generaliserar den klassiska Petersson–Weil-metriken) på ett (kompaktifierat) modulirum av polariserade projektiva varieteter, samt att påvisa existensen av en naturlig determinantbunt, försedd med en Quillen-metrik, vars Chern-form är lika med den generaliserade Petersson–Weil-metriken. På detta sätt följer det att man har positivitet.

Vår metod bygger på resultat från teorin för singulära hermiteska metriker, och vi bevisar följande generalisering av Kodairas inbäddningssats:

Sats *Låt X vara ett irreducibelt, ej nödvändigtvis reducerat, algebraiskt rum med en kompaktifiering $\overline{X}$. Låt L vara en holomorf linjebunt på $\overline{X}$. Avbildningen*

$$\Phi_{|mL|} : \overline{X} \rightharpoonup \mathbf{P}_{N(m)},$$

med $N(m) = \dim |mL|$, definierar en inbäddning av X för tillräckligt stora m, förutsatt att följande två villkor är uppfyllda:

(i) för varje $p \in \overline{X}$ och för varje holomorf kurva $C \subset \overline{X}$ genom p med $C \cap X \neq \varnothing$ så är den positiva d-slutna strömmen $\Theta_h|C$ väldefinierad och har Lelong-tal $\nu(\Theta_h|C, p)$ lika med noll;

(ii) för varje slätt lokalt slutet delrum $Z \subset X$ är strömmen $\Theta_h|_Z$ väldefinierad och uppfyller $\Theta_h|_Z \geq \gamma_Z$ i strömmening, där γ_Z betecknar en positivt definit hermitesk form av klass C^∞ på Z.

Vi föreslår sedan att man tillämpar ovanstående sats i situationen med polariserade varieteter. Modulirummet av kanoniskt polariserade ramade varieteter projiceras funktoriellt på rummet av polariserade varieteter, varvid såväl den generaliserade Petersson–Weil-metriken som Quillen-metriken på respektive determinantbunt överförs på önskat sätt. Däremot behöver vi ett extra villkor för att visa att Lelong-talen för den generaliserade Petersson–Weil-formen är lika med noll.

Litteraturhänvisning

Georg Schumacher & Hajime Tsuji Quasi-projectivity of moduli spaces of polarized varieties *Annals of Mathematics* **159** (2004) 597–639

Burglind Juhl–Jöricke

Några anmärkningar angående en klass flerskiktade holomorfienvelopper

För ett allmänt område i $\mathbf{C}^n$ är det svårt att direkt utgående från områdets geometri avgöra huruvida dess holomorfienvelopp är enkelskiktad (eller *schlicht*) över $\mathbf{C}^n$. Det har visat sig vara möjligt att komma någonvart med detta problem i fallet med lämpliga små (ensidiga) omgivningar till delmängder M av enhetssfären $\partial\,\mathbf{B}^n$, eller delmängder av andra strikt pseudokonvexa ränder i $\mathbf{C}^n$.

Det bevisades av Eric Bedford och Wilhelm Klingenberg (och senare även av Nikolay Kruzhilin) att om $n = 2$ och M är en generisk två-sfär så är dess holomorfienvelopp ett tre-klot folierat av analytiska skivor, och speciellt är den alltså enkelskiktad. Lee Stout, Zbigniew Słodkowski med flera visade att även vissa något mer allmänna holomorfienvelopper är enkelskiktade i fallet $n = 2$.

För högre dimensioner än två är situationen en annan. Stout konstruerade tillsammans med Evgeni Chirka en öppen delmängd av en strikt pseudokonvex rand i $\mathbf{C}^4$ med dubbelskiktad holomorfienvelopp.

Vi betraktar här följande fall. Låt M vara en slät CR-mångfald av reell dimension $2n-2$ innehållen i enhetssfären $\partial\,\mathbf{B}^n \subset \mathbf{C}^n$, $n > 2$. Vi bevisar att om ∂M är unionen av ändligt många $(n-1)$-dimensionella analytiska varieteter och M är globalt minimal, så är holomorfienveloppen för $\partial\,\mathbf{B}^n \setminus \overline{M}$ flerskiktad. Vi påvisar också vissa fall då antalet skikt blir exakt två. För 4-dimensionella CR-mångfalder som ligger i sfären $\partial\,\mathbf{B}^3$ konstaterar vi att egenskapen att vara globalt minimal (och till och med att vara av ändlig typ i varje punkt) är en generisk egenskap.

Litteraturhänvisning

BURGLIND JÖRICKE & NIKOLAY SHCHERBINA On some class of sets with multi-sheeted envelope of holomorphy *Mathematische Zeitschrift* **247** (2004) 711–732

Timur Sadykov

Hypergeometriska funktioner av flera komplexa variabler

En multivariat Laurent-serie sägs vara hypergeometrisk om kvoten mellan två intilliggande koefficienter är en rationell funktion av summationsindexen. Vi ska diskutera singulariteterna hos hypergeometriska funktioner som uppkommer genom analytisk fortsättning av hypergeometriska serier. En hypergeometrisk serie $y(x)$ satisfierar det så kallade Horn-systemet

$$x_i P_i(\theta) y(x) = Q_i(\theta) y(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Här är P_i, Q_i polynomsymboler uttryckta i Euler-operatorerna $\theta_i = x_i \partial / \partial x_i$. Vi betraktar det icke-konfluenta fallet då $\deg P_i = \deg Q_i$ för alla $i = 1, \dots, n$.

I fallet $n = 1$ utgörs singulariteterna för Horn-ekvationen av de tre punkterna $0, t, \infty$, där t är kvoten av de ledande koefficienterna i P_1 och Q_1. Speciellt har man för Gauss klassiska hypergeometriska ekvation $t = 1$. Singularitetsmängden är alltså minimal i den meningen att det endast finns två cirkulära områden, närmare bestämt $\{0 < |x| < |t|\}$ och $\{|t| < |x| < \infty\}$, i vilka ekvationens lösningar kan representeras som Laurent-serier (eventuellt också med potenser av $\log x$) centrerade i origo.

Det visar sig att de algebraiska singulariteterna till det allmänna Horn-systemet också är minimala i en viss multidimensionell mening, som bäst formuleras i termer av amöbor. Med *amöban* till en algebraisk hyperyta $\mathcal{R} = \{x;\, R(x) = 0\}$ menas dess bild under den logaritmiska avbildningen $\mathrm{Log}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \dots, \log|x_n|)$. Komplementet till en sådan amöba består av ett ändligt antal konvexa komponenter vilka motsvarar konvergensområden för Laurent-serieutvecklingar av rationella funktioner med poler längs $\mathcal{R}$. Antalet sådana komponenter är aldrig mindre än antalet hörn hos Newton-polytopen för polynomet R. Om dessa två tal är lika säger vi att amöban är *solid*. Huvudresultatet i detta föredrag utgörs av följande sats.

Den singulära hyperytan till varje icke-konfluent hypergeometrisk funktion har en solid amöba.

En hypergeometrisk funktion som löser ett så kallat Gelfand–Kapranov–Zelevinsky-system har sina singulariteter längs nollställena för motsvarande principala $\mathcal{A}$-determinant. Vår sats leder därför till följande korollarium.

Nollställemängden för varje principal $\mathcal{A}$-determinant har en solid amöba.

Detta medför speciellt att amöban till diskriminanten för en allmän algebraisk ekvation är solid.

Litteraturhänvisning

Mikael Passare, Timur Sadykov & August Tsikh Singularities of hypergeometric functions in several variables *Compositio Mathematica* **141** (2005) 787–810

Kristian Seip

Extremalfunktioner som divisorer för kärnor till Toeplitz-operatorer

Ursprunget till den typ av problem vi behandlar går tillbaka till Arne Beurlings klassiska sats om invarianta delrum. Denna sats säger att varje icke-trivialt skiftinvariant delrum hos Hardy-rummet H^2 på enhetsskivan är av formen IH^2 för någon inre funktion I. Vi använder en slagkraftig idé av Håkan Hedenmalm som går ut på att omtolka Beurlings sats i termer av extremalfunktioner. Med en extremalfunktion för ett Banach-rum av analytiska funktioner i enhetsskivan avses här en funktion som maximerar $\sup \operatorname{Re} f(0)$ bland funktioner f av norm 1. Det visar sig då att den inre funktionen I i Beurlings sats (lämpligt normaliserad) är lika med extremalfunktionen för det aktuella invarianta delrummet. På detta sätt kan alltså det invarianta delrummet enkelt beskrivas med hjälp av dess extremalfunktion, som också verkar som en isometrisk divisor på delrummet.

Vi intresserar oss för extremalfunktioner för kärnor till Toeplitz-operatorer på Hardyrummen H^p, $1 < p < \infty$. Sådana kärnor utgör specialfall av så kallade *nästan invarianta delrum* med avseende på bakåtskiftet, och det visades (för $p = 2$) av Daniel Hitt att på sådana rum verkar extremalfunktionerna som isometriska divisorer. Vi visar att extremalfunktionen förblir en kontraktiv divisor även i fallet $p < 2$ och en expansiv divisor när $p > 2$, allt upp till multiplikativa konstanter som beror av p. Vi visar också att dessa resultat är optimala: det finns exempel då extremalfunktionen inte är kontraktiv för $p > 2$, respektive inte expansiv för $p < 2$. I ljuset av dessa nya resultat framstår Hilbert-rumsfallet som ett anmärkningsvärt gränsfall.

Genom att koppla vårt divisorproblem till resultat rörande Carleson-mått för invaranta delrum, kan vi peka ut vissa gynnsamma fall där extremalfunktionen verkar både kontraktivt och expansivt i hela intervallet $1 < p < \infty$. I dessa situationer är kärnan till Toeplitz-operatorn fullständigt bestämd av extremalfunktionen och ett tillhörande invariant delrum för bakåtskiftet.

Litteraturhänvisning

Andreas Hartmann & Kristian Seip Extremal functions as divisors for kernels of Toeplitz operators *Journal of Functional Analysis* **202** (2003) 342–362

Peter Ebenfelt

Rigiditet för CR-inbäddningar in i sfärer

Låt $X \subset \mathbf{C}^{n+d+1}$ vara en komplexanalytisk irreducibel varietet av (komplex) dimension $n+1$. Anta att X skär det öppna klotet B_ε med radie $\varepsilon > 0$ och medelpunkt i origo. Snittet $K_\varepsilon = X \cap \partial B_\varepsilon$ är då en reellanalytisk varietet i X, och vi låter $M_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ vara den relativt öppna delmängd av punkter där X är icke-singulär och transversell mot sfären $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Vi benämner M_ε *länken* för singulariteten $(X, 0)$. I det klassiska fallet då X har en isolerad singularitet i origo så är $M_\varepsilon = K_\varepsilon$ för små $\varepsilon > 0$.

Om nu X' är en annan varietet av samma typ med länk M'_ε, och om det existerar en biholomorf automorfi av klotet B_ε som överför $X \cap B_\varepsilon$ på $X' \cap B_\varepsilon$ så är länkarna M_ε och M'_ε uppenbarligen CR-ekvivalenta delmångfalder av sfären S_ε. (Observera att automorfierna av klotet B_ε bara utgörs av brutna linjärtransformationer, vars restriktioner till S_ε ger alla CR-automorfier av sfären.) Vi studerar här den omvända frågan: *Är varieteten X entydigt bestämd, upp till automorfier av B_ε, av den lokala CR-strukturen hos länken M_ε?*

Svaret är i allmänhet "nej", och ett enkelt motexempel fås genom att låta X vara planet $z_1 = \ldots = z_n = 0$ i $\mathbf{C}^{2n+1}$ medan X' är bilden av hela $\mathbf{C}^{n+1}$ under den så kallade Whitney-inbäddningen $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, z_1 z_{n+1}, z_2 z_{n+1}, \ldots, z_n z_{n+1}, z_{n+1}^2)$. Vi bevisar dock att om M är en sammanhängande slät CR-hyperyta av (reell) dimension $2n+1$, och om $d < n/2$, så är varje slät CR-immersion f av M in i enhetssfären $S \subset \mathbf{C}^{n+d+1}$ rigid. Det vill säga att varje annan slät CR-immersion $\tilde{f}\colon M \to S$ är av formen $\phi \circ f$, där ϕ är en CR-automorfi av S. Detta leder till nedanstående följdsats:

Anta att både X och X' har isolerade singulariteter i origo och inga andra singulariteter i klotet B_ε, samt att snitten $X \cap B_\varepsilon$ och $X' \cap B_\varepsilon$ är sammanhängande. Om $d < n/2$ och länkarna M_ε och M'_ε är lokalt CR-ekvivalenta i något punktpar $q \in M_\varepsilon$ respektive $q' \in M'_\varepsilon$, så existerar det en unitär linjärtransformation som avbildar $X \cap B_\varepsilon$ på $X' \cap B_\varepsilon$

Litteraturhänvisning

PETER EBENFELT, XIAOJUN HUANG & DMITRI ZAITSEV Rigidity of CR-immersions into spheres *Communications in Analysis and Geometry* **12** (2004) 631–670

Norman Levenberg

Uppräknelighet via kapacitet

En delmängd $E \subset \mathbf{C}$ kallas *polär* om det existerar en subharmonisk funktion u definierad på något område $D \supset E$ sådan att $u \not\equiv -\infty$ på D men $u \equiv -\infty$ på E. Den *logaritmiska kapaciteten* hos en kompakt delmängd $K \subset \mathbf{C}$ definieras som

$$c(K) = \exp\Big(\sup_{\mu} \iint \log|z-w|\, d\mu(z) d\mu(w)\Big),$$

där supremum tas över alla borelska sannolikhetsmått μ med stöd på K. Det är ett välkänt faktum att K är polär om och endast om $c(K) = 0$. Här ska vi använda logaritmisk kapacitet för att karakterisera de kompakta mängder K som är *uppräkneliga*.

Givet två kompakta delmängder $K, L \subset \mathbf{C}$ låter vi $K+L$ beteckna deras vektorsumma

$$\{z+w;\ z \in K,\ w \in L\}.$$

I allmänhet följer det inte av $c(K) = c(L) = 0$ att $c(K+L) = 0$. I själva verket har vi följande nya resultat:

$c(K+L) = 0$ *för alla* L *med* $c(L) = 0$ *om och endast om* K *är uppräknelig*.

Det är enkelt att inse att om K är uppräknelig och L har kapacitet noll, så har även vektorsumman $K+L$ kapacitet noll. Den svåra implikationen är alltså att K nödvändigtvis måste vara uppräknelig. Huvudidén i beviset består i att reducera problemet till fallet då mängden K är en viss sorts Cantor-mängd, för vilken vi kan utföra explicita kalkyler.

Vår motivation för att bevisa detta resultat härrör från teorin för analytiska multifunktioner. Dessa utgör en klass mängdvärda funktioner av en komplex variabel, med många egenskaper som påminner om dem hos klassiska analytiska funktioner. Eftersom multifunktionerna kan anta godtyckliga (icke-tomma) delmängder av $\mathbf{C}$ som värden har de dock ett mycket bredare användningsområde. Med hjälp av vårt nya resultat kan vi ge ett mycket enkelt bevis för den så kallade knapphetssatsen för analytiska multifunktioner som säger att den mängd av punkter $\lambda \in D \subset \mathbf{C}$ för vilka en analytisk multifunktion K antar ett uppräkneligt värde $K(\lambda)$ är antingen polär eller lika med hela definitionsmängden D.

Litteraturhänvisning

Norman Levenberg, Thomas Ransford, Jérémie Rostand & Zbigniew Słodkowski
Countability via capacity *Mathematische Zeitschrift* **242** (2002) 399–406

Alexander Brudnyi

Begränsade analytiska funktioner på speciella Riemann-ytor

Låt $N \Subset M$ vara ett relativt kompakt område i en öppen Riemann-yta M sådan att

$$\pi_1(N) \cong \pi_1(M).$$

Låt vidare R vara en oförgrenad övertäckning av N, och $i : U \hookrightarrow R$ ett område i R. Anta att den inducerade homomorfin på fundamentalgrupperna $i_*: \pi_1(U) \to \pi_1(R)$ är injektiv.

I detta föredrag diskuterar vi några egenskaper hos algebran $H^\infty(U)$ av begränsade holomorfa funktioner på ett område U som ovan. Något mer precist presenterar vi en utvidgningssats för matriser vars element tillhör $H^\infty(U)$. Man säger att en uppsättning funktioner $f_1,\dots, f_n$ från $H^\infty(U)$ uppfyller *koronavillkoret* om

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta > 0 \quad \text{för alla} \quad z \in U\,.$$

Enligt ett av våra tidigare resultat är koronaproblemet lösbart i $H^\infty(U)$ vilket betyder att för varje uppsättning $f_1,\dots, f_n$ som uppfyller koronavillkoret finns det en annan uppsättning funktioner $g_1,\dots, g_n \in H^\infty(U)$ sådana att

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_n g_n \equiv 1\,.$$

Om U exempelvis är den öppna enhetsskivan $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ så följer lösbarheten för koronaproblemet från Lennart Carlesons berömda koronasats. Här betraktar vi en matrisversion av koronaproblemet.

Sats: *Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times k$-matris, $k < n$, med element i $H^\infty(U)$. Anta att familjen av minorer till A av ordning k uppfyller koronavillkoret. Då existerar det en $n \times n$-matrix $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$, $\widetilde{a}_{ij} \in H^\infty(U)$, sådan att $\widetilde{a}_{ij} = a_{ij}$ för $1 \leq j \leq k$, och $\det(\widetilde{A}) = 1$.*

Vi ger även en uppskattning (oberoende av U) av normen för $\widetilde{A}$ i termer av dels normen för A dels konstanterna δ, n och N. Beviset av satsen bygger på ett nytt resultat av Forelli-typ för projektioner på $H^\infty(U)$ samt på ett slags Grauert-sats för "holomorfa vektorbuntar" definierade på vissa maximalidealrum.

Litteraturhänvisningar

ALEXANDER BRUDNYI Projections in the space H^∞ and the corona theorem for subdomains of coverings of finite bordered Riemann surfaces *Arkiv för matematik* **42** (2004) 31–59

ALEXANDER BRUDNYI Grauert- and Lax-Halmos-type theorems and extension of matrices with entries in H^∞ *Journal of Functional Analysis* **206** (2004) 87–108

Alicia Dickenstein

Binomresidyer

Med begreppet *binomresidy* avses en rationell funktion i $2n$ variabler $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, som definieras av en residyintegral av formen

$$R_\Gamma(x,y) := \int_\Gamma \frac{t^\gamma}{(x_1 + t^{a_1} y_1)^{\beta_1} \cdots (x_n + t^{a_n} y_n)^{\beta_n}} \frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_d}{t_d}.$$

Här betecknar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nollskilda heltalsvektorer som spänner upp gittret $\mathbf{Z}^d$, γ är en godtycklig vektor i $\mathbf{Z}^d$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ är positiva heltal, och Γ tillhör en viss uppsättning kompakta d-cykler i den komplexa torusen $(\mathbf{C}^*)^d$.

Vi studerar analytiska, kombinatoriska och geometriska egenskaper hos binomresidyer. När det gäller den analytiska aspekten betraktar vi binomresidyer som hypergeometriska integraler och, följaktligen, som rationella lösningar till så kallade A-hypergeometriska system av partiella differentialekvationer. Här syftar vi på de system som infördes av Israel Gelfand, Mikhail Kapranov och Andrei Zelevinsky, och matrisen A fås som *Lawrence-lyftningen* av vektorkonfigurationen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Den kombinatoriska invarianten $\chi(A)$ för konfigurationen A definierar vi som summan av $(-1)^{|I|}$ för alla I sådana att $\{a_i, i \in I\}$ är linjärt oberoende. Denna invariant är i själva verket Euler-karakteristiken hos matroidkomplexet för A. En rationell funktion f i variablerna $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ kallas *stabil* om den inte annihileras av någon högre (partiell) derivata. Vårt huvudresultat består i en integralrepresentation av stabila rationella A-hypergeometriska funktioner för Lawrence-lyftningar A som linjärkombinationer av binomresidyer $R_\Gamma(x,y)$. Vi visar också att för varje val av parametrar γ och $\beta_1, \ldots, \beta_n$ så är dimensionen för detta rum lika med $\chi(A)$.

Litteraturhänvisning

EDUARDO CATTANI, ALICIA DICKENSTEIN & BERND STURMFELS Binomial residues *Annales de l'Institut Fourier* **52** (2002) 687–708

Stéphane Rigat

Samband mellan Fantappiè-transformen och det komplexa Cauchy-problemet

Låt $\Omega \subset \mathbf{C}^{1+n} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ vara en öppen mängd sådan att snittet $\omega = \Omega \cap \{z_0 = 0\}$ är icketomt. Vi skriver $z = (z_0, z')$ och betecknar med $T_1, \ldots T_n$ de kommuterande operatorerna

$$T_k f(z) = \int_0^{z_0} \frac{\partial f(\zeta_0, z')}{\partial \zeta_k} \, d\zeta_0$$

som verkar på rummet $\mathcal{O}(\omega)$ av holomorfa groddar (av $1+n$ varabler). För varje polynom $\varphi \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ av formen $\varphi(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$ låter vi sedan $\varphi(T) = \varphi(T_1, \ldots, T_n)$ beteckna operatorn $\sum a_\alpha T^\alpha$. Vi använder dessutom beteckningarna $\mathcal{P}_n$ och $\mathcal{B}_n$ för enhetspolydisken respektive enhetsklotet i $\mathbf{C}^n$. Vårt huvudresultat är nedanståendende funktionalkalkyl för operatorerna T_k, definierad i Fantappiès anda:

(i) *För varje $f \in \mathcal{O}(\omega)$, varje $\varepsilon > 0$ och varje $z \in \Omega$ tillräckligt nära ω kan avbildningen $\mu_{f,z}\colon \varphi \mapsto [\varphi(T)f](z)$ entydigt utvidgas till en analytisk funktional på $\mathcal{O}(\varepsilon\mathcal{P}_n)$, och man har att $\varphi(T)f \in \mathcal{O}(\omega)$, för varje $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathcal{P}_n)$ och varje $f \in \mathcal{O}(\omega)$.*

(ii) *För alla $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\varepsilon\mathcal{P}_n)$ gäller $\{[\varphi\psi(T)]\, f\}(z) = \{\varphi(T)[\psi(T)f]\}(z)$.*

(iii) *För varje $\varphi \in \mathcal{O}(\varepsilon\bar{\mathcal{B}}_n)$ gäller representationsformeln*

$$[\varphi(T)f](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \varphi(\zeta) F^{\varepsilon}_{f,z}(-\bar{\zeta}) \partial(|\zeta|^2) \wedge (\bar{\partial}\partial(|\zeta|^2))^{n-1}$$

där kärnan ges av $F^{\varepsilon}_{f,z}(\zeta) = \left[\frac{1}{(\varepsilon^2 + \langle\zeta, T\rangle)^n} f\right](z)$.

Notera att kärnan i formeln ovan kan uttryckas som en itererad derivata av Fantappiètransformen $\mathcal{F}\mu_{f,z}(\zeta) = \left[(1 + \langle\zeta, T\rangle)^{-1} f\right](z)$ av den analytiska funktionalen $\mu_{f,z}$. För att beräkna $\varphi(T)f$ räcker det alltså att kunna beräkna $\mathcal{F}\mu_{f,z}(\zeta)$, och för detta är det i sin tur tillräckligt att finna en lösning h till ett första ordningens Cauchy-problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial z_0} + \zeta_1 \dfrac{\partial h}{\partial z_1} + \cdots + \zeta_n \dfrac{\partial h}{\partial z_n} = \dfrac{\partial f}{\partial z_0}, \\ h(0, z') = f(0, z'). \end{cases}$$

Vi tillämpar ovanstående resultat för att ge explicita lösningar till holomorfa ickekarakteristiska Cauchy-problem av godtycklig ordning.

Litteraturhänvisning

Stéphane Rigat Fonctionnelles analytiques et problèmes de Cauchy *Comptes rendus – Mathématique* **342** (2006) 295–300

Bo Berndtsson

Egenvärdesfördelningen för $\bar{\partial}$-Laplacianen

Låt X vara en kompakt komplex mångfald av dimension n, med en holomorf linjebunt $L \mapsto X$. Om L har en hermitesk metrik med strikt positiv krökning, så följer det av Kodairas sats att alla kohomologigrupper

$$H^{n,q}(X, L^k)$$

försvinner om $k > 0$ och $q > 0$. Om L har en metrik vars krökning bara är semipositiv så är detta inte längre nödvändigtvis sant. Det enklaste motexemplet får man genom att låta X vara en produkt $X = Y \times Z$ och ta L som produkten av tillbakadragningen av en bunt på Y och en på Z. Om bunten över Y är platt och bunten över Z är positiv, så får man icke-triviala kohomologiklasser genom att dra tillbaka sådana klasser från Y och multiplicera med holomorfa sektioner till bunten över Z.

I det semipositiva fallet kan man dock få asymptotiska uppskattningar av dimensionerna

$$h^{n,q} = \dim H^{n,q}(X, L^k).$$

För exemplen av typen $X = Y \times Z$ ovan kan man få dessa att växa högst som $O(k^{n-q})$ om Y är av dimension q. Satsen jag bevisar säger att denna övre uppskattning gäller i allmänhet. Detta resultat var välkänt i den algebraiska situationen, då man kan använda en kort exakt sekvens associerad till en ampel divisor för att uppskatta dimensionen. Poängen i den sats jag diskuterar är att samma sak gäller allmänt. Detta generaliserar en tidigare uppskattning av Yum-Tong Siu, som visat att dimensionen är $o(k^n)$, och använde det till att bevisa en förmodan av Hans Grauert och Oswald Riemenschneider.

Mitt bevis bygger på en uppskattning av Bergman-kärnan för rummet $\mathcal{H}^{n,q}$ bestående av harmoniska (n, q)-former med avseende på Laplace-operatorn $\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$, där $\bar{\partial}^*$ är den formella adjunkten till $\bar{\partial}$-operatorn. Eftersom dimensionen $h^{n,q}$ är lika med integralen av Bergman-kärnan får man uppskattningar av dimensionen från uppskattningar av Bergmankärnan, och dessa följer i sin tur av ett slags Jensens formel för subharmoniska former, bevisad av Henri Skoda.

Litteraturhänvisning

Bo Berndtsson An eigenvalue estimate for the $\bar{\partial}$-Laplacian
Journal of Differential Geometry **60** (2002) 295–313