NORDAN SJU

Maltfabriken i Visby, 23-25 maj 2003

VÄRLDSARVSSTADEN Visby på natursköna Gotland bildade fond för Nordan-konferens nummer sju. De rekordmånga deltagarna var inhysta på anrika Visby hotell och föredragen avnjöts i den gamla maltfabriken i Visby hamn, där Högskolan på Gotland numera har sina lokaler. På lördagen uppmärksammades Urban Cegrells 60-årsdag med såväl andlig som kroppslig aktivitet. Den senare bestod i en cykeltur till naturreservatet Högklint där alla deltagare undfägnades med saffranspannkaka och salmbärssylt.

DELTAGARE

Dmitri Akhiezer (Moskva)
Lars Alexandersson (Linköping)
Mats Andersson (Göteborg)
Jim Arlebrink (Borås)
Aboubakr Bayoumi (Riyad)
Berit Bengtson (Umeå)
Lennart Berglind (Uppsala)
Robert Berman (Göteborg)
Gautam Bharali (Sundsvall)
Zbigniew Błocki (Krakow)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Stefan Borell (Sundsvall)
Judith Brinkschulte (Leipzig)
Magnus Carlehed (Stockholm)
Linus Carlsson (Umeå)
Urban Cegrell (Umeå/Sundsvall)
Evgeni Chirka (Moskva)
Rafał Czyż (Sundsvall)
Tomas Edlund (Uppsala)
Lars Filipsson (Stockholm)
Salla Franzén (Uppsala)
Anders Fällström (Umeå)
Elin Götmark (Göteborg)
Marius Irgens (Trondheim)
David Jacquet (Stockholm)
Bengt Josefson (Linköping)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Christer Kiselman (Uppsala)
Frank Kutzschebauch (Sundsvall)
Evgeni Leinartas (Krasnojarsk)
László Lempert (West Lafayette)
Norman Levenberg (Auckland)
Andreas Lind (Sundsvall)
Karl-Olof Lindahl (Växjö)
Niklas Lindholm (Lund)
Sam Lodin (Sundsvall)
Erik Løw (Oslo)
Klas Markström (Umeå)
Francine Meylan (Fribourg)
Nguyên Quang Dieu (Sundsvall)
Myriam Ounaïes (Strasbourg)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Petersson (Göteborg)
Anca Popa–Fischer (Wuppertal)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Juhani Riihentaus (Villmanstrand)
Hans Rullgård (Stockholm)
Håkan Samuelsson (Göteborg)
Sebastian Sandberg (Göteborg)
Alexej Schuplev (Stockholm)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Vitali Stepanenko (Krasnojarsk)
Per-Anders Svensson (Växjö)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Jan Wiegerinck (Amsterdam)
Jonas Wiklund (Umeå)
Elizabeth Wulcan (Göteborg)
Yang Xing (Umeå)
Vyacheslav Zahariuta (Istanbul)
Per Åhag (Sundsvall)
Nils Øvrelid (Oslo)

[61 personer]

PROGRAM

Fredag 23 maj

14.15-15.00 Evgeni Chirka *Holomorphic motions over a Riemann surface*
15.15-16.00 Henrik Petersson *PDE-preserving operators on smooth functions*
17.15-18.00 Myriam Ounaies *On interpolating discrete varieties for weighted spaces of entire functions*
18.15-19.00 Marius Irgens *Localization of the Bergman function and applications to L^2_h-domains of holomorphy*

Lördag 24 maj

09.15-10.00 Christer Kiselman *The mathematics of Urban Cegrell*
10.15-11.00 Anca Popa–Fischer *On the identity of q-PSH and q-WPSH functions*
11.15-12.00 Yang Xing *The complex Monge–Ampère equations with singular measures*
17.15-18.00 Vyacheslav Zahariuta *Some applications of pluripotentials to approximations*
18.15-19.00 Zbigniew Blocki *On the definition of the complex Monge–Ampère operator for non-smooth plurisubharmonic functions*

Söndag 25 maj

10.15-11.00 László Lempert *Analytic cohomology in infinite dimensional spaces*
11.15-12.00 Judith Brinkschulte *Attaching Riemann surfaces to totally real tori in* $\mathbf{C}^2$
12.15-13.00 Mats Andersson *Residue currents of holomorphic sections*

ARRANGÖRER

Lars Filipsson och Mikael Passare

FINANSIÄRER

Vetenskapsrådet
Axel Wenner–Grens stiftelse för internationellt forskarutbyte
Letterstedtska föreningen
Stockholms universitet
Kungliga tekniska högskolan

Evgeni Chirka

Holomorfa rörelser över en Riemann-yta

Låt $\{f_\tau\}_{\tau\in E}$ vara en familj av holomorfa funktioner med parvis disjunkta grafer på en Riemann-yta Ω. Vi fixerar en (godtycklig) baspunkt $z_0 \in \Omega$. Eftersom värdena $f_\tau(z_0) \in \mathbf{C}$ antas vara olika för olika τ kommer vi helt enkelt att sätta $f_\tau(z_0) = \tau \in E \subset \mathbf{C}$. Den totala funktionen $f(z,\tau) = f_\tau(z)$ är då en så kallad *holomorf rörelse* av mängden E över Ω. Problemet vi betraktar består i att försöka utvidga den givna familjen (fortfarande med parvis disjunkta grafer) till alla parametervärden $\tau \in \mathbf{C}$, så att vi får en holomorf rörelse av hela det komplexa planet $\mathbf{C}$.

För specialfallet då $\Omega = D$, enhetsskivan i $\mathbf{C}$, löstes problemet av Zbigniew Słodkowski 1991. I sitt bevis använde han sig av lösbarhetsresultat för speciella icke-linjära Riemann–Hilbert-problem.

I det allmänna fallet finns det naturliga topologiska obstruktioner som omöjliggör utvidgningen av vissa holomorfa rörelser. Låt oss normalisera $\{f_\tau\}$ genom att göra de extra antagandena $0, 1 \in E$, $f_0 \equiv 0, f_1 \equiv 1$. Då är villkoret att argumentförändringen $\Delta_\gamma \arg(f_\tau - f_\sigma)$ längs en godtycklig sluten kurva $\gamma \subset \Omega$ ska vara lika med noll för alla $\tau, \sigma \in E$ både nödvändigt och tillräckligt för existensen av en kontinuerlig utvidgning av rörelsen. (Det vill säga att det då finns kontinuerliga funktioner f_τ, $\tau \in \mathbf{C}$ med parvis disjunkta grafer).

Vi bevisar att detta topologiska villkor också är tillräckligt för holomorf utvidgning. Med andra ord, Oka-principen gäller för utvidgning av holomorfa rörelser över en godtycklig Riemann-yta. Beviset sker genom att man reducerar problemet till en fråga om lösbarhet för variationer av speciella icke-linjära $\bar\partial$-ekvationer på kompakta Riemann-ytor.

Litteraturhänvisning

EVGENI CHIRKA O rasprostranenii golomorfnyh dviženiĭ
Doklady Akademii nauk **397** (2004) 37–40

Henrik Petersson

PDE-bevarande operatorer på släta funktioner

En kontinuerlig linjär operator T, definierad på ett lämpligt rum X av testfunktioner, sägs vara PDE-*bevarande* med avseende på en uppsättning polynom $\mathcal{P}$ om $\ker P(D)$ är invariant under T, det vill säga om $T \ker P(D) \subseteq \ker P(D)$, för alla $P \in \mathcal{P}$. Mängden av PDE-bevarande operatorer $O(\mathcal{P})$ med avseende på en given mängd $\mathcal{P}$ har strukturen av en algebra, under sammansättning av operatorer, så X är på ett naturligt sätt en $O(\mathcal{P})$-modul. Teorin för PDE-bevarande operatorer har sitt ursprung inom interpolationsteorin och den är bäst utvecklad i fallet då X är rummet av hela analytiska funktioner av n variabler (inklusive utvidgningar till oändligdimensionell holomorfi). I detta föredrag fokuserar vi på PDE-bevarande operatorer på Fréchet-rummet $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ bestående av släta funktioner av n variabler. Dessa studier är ännu pågående och vi diskuterar några av de väsentliga resultaten som hittills framkommit.

Som utgångspunkt för föredraget presenterar vi en sats om kärnor: Vi påminner om att via Fourier–Laplace-transformationen och Paley–Wiener–Schwartz sats kan $\mathcal{E}'$ identifieras med ett rum E bestående av hela funktioner av exponentiell tillväxt. Det finns nu en mängd $\mathfrak{S}$ av avbildningar $P(x, \xi)$, så kallade *symboler*, definierade på $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^n$ som tillhör $\mathcal{E}$ och E med avseende på respektive variabler x och ξ, samt en bijektion mellan $\mathfrak{S}$ och algebran $\mathcal{L}$ av kontinuerliga linjära operatorer på $\mathcal{E}$.

Per definition har man $T \in O(\mathcal{P})$ precis om T är PDE-bevarande för alla $P \in \mathcal{P}$. Vi kan alltså koncentrera oss på att studera $O(P)$ för ett givet godtyckligt polynom P. En operator $T \in \mathcal{L}$ är uppenbarligen PDE-bevarande för P om det finns en $S \in \mathcal{L}$ sådan att $P(D)T = SP(D)$. Ett mer intressant faktum är att detta också är ett nödvändigt villkor. Vi diskuterar beviset av detta faktum och några av dess konsekvenser. Speciellt härleder vi, genom att använda kärnsatsen, ett explicit villkor på en operators symbol för att operatorn ska tillhöra $O(P)$. Vi visar också att operatorn S är entydigt bestämd, och vi kallar den för derivatan av T med avseende på P. I mån av tid tar vi slutligen upp några resultat rörande $O(\mathcal{H})$, där $\mathcal{H}$ betecknar mängden av homogena polynom. Det följer att symbolerna $P(x, \xi)$ för operatorerna i $O(\mathcal{H})$ är reell-analytiska i x och med hjälp av de tillhörande potensserierna kan vi framställa en bijektion mellan $O(\mathcal{H})$ och en mängd $\mathcal{S}$ av funktionsföljder i E. Dessutom beror derivatan av varje $T \in O(\mathcal{H})$, med avseende på ett m-homogent polynom P, endast på graden m och inte på det speciella polynomet P.

Litteraturhänvisningar

HENRIK PETERSSON Rings of PDE-preserving operators on nuclearly entire functions *Studia Mathematica* **163** (2004) 217–229

HENRIK PETERSSON PDE-preserving properties *Journal of the Korean Mathematical Society* **42** (2005) 573–597

Myriam Ounaies

Om diskreta interpolationsvarieteter för viktade rum av hela funktioner

Låt $p : \mathbf{C}^n \to [0, +\infty[$ vara en plurisubharmonisk viktsfunktion och betrakta rummen $A_p(\mathbf{C}^n)$ av holomorfa funktioner $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ sådana att

$$\exists A, B > 0,\ \forall z \in \mathbf{C}^n,\ |f(z)| \leq A \exp(Bp(z)).$$

Låt $V = \{z_k\}$ vara en diskret delmängd i $\mathbf{C}^n$. Vi säger att V är en interpolationsvarietet för $A_p(C^n)$ om det för varje följd $\{C_k\} \in \mathbf{C}$ sådan att

$$\exists A, B > 0,\ \forall k\ |C_k| \leq A \exp(Bp(z_k)),$$

existerar en funktion $f \in A_p(\mathbf{C}^n)$ med $f(z_k) = C_k$ för alla k.

Vi är intresserade av att finna geometriska villkor på mängden $\{z_k\}$ för att den ska vara interpolerande. Låt oss införa beteckningen $d_k = \inf_{j \neq k} |z_j - z_k|$. Ett nödvändigt villkor är då

$$(*) \qquad \exists \varepsilon, B > 0,\ \forall k,\ \ d_k \geq \varepsilon \exp(-Bp(z_k)).$$

Vi ska visa att uppskattningen $d_k^{-2} \log d_k^{-1} = O(|z_k|^{\rho-2})$ är ett tillräckligt villkor för det fallet då $|z|^\rho = O(p(z))$.

Om vi betraktar två diskreta interpolationsvarieteter, så ser vi att deras union inte nödvändigtvis uppfyller villkoret $(*)$ och följaktligen inte säkert är interpolerande. Vi visar dock att om villkoret $(*)$ råkar vara uppfyllt så är den faktiskt interpolerande. Därefter använder vi oss av en analytisk karakterisering framtagen av Carlos Berenstein och Bao Qin Li för att bevisa att uppskattningen

$$n(0, r, V) = O((\sup_{|z| \leq r} p(z))^n),$$

där $n(0, r, V)$ betecknar antalet punkter z_k med $\|z_k\| \leq r$, är ett nödvändigt villkor.

Litteraturhänvisning

MYRIAM OUNAIES On interpolating discrete varieties for weighted spaces of entire functions *Analysis Mathematica* **29** (2003) 59–74

Marius Irgens

Lokalisering av Bergman-funktionen och tillämpningar på L^2_h-holomorfiområden

Låt Ω vara ett område i $\mathbf{C}^n$ och beteckna med $L^2_h(\Omega)$ rummet av kvadratiskt integrerbara holomorfa funktioner på D. Eftersom $L^2_h(\Omega)$ är ett Hilbert-rum kan vi hitta en ortonormerad bas $\{\varphi_j\}$, och vi definierar *Bergman-funktionen* som $K_\Omega(z) = \sum_j |\varphi_j(z)|^2$, för $z \in \Omega$. Denna definition är oberoende av valet av ortonormerad bas, vilket exempelvis följer från den alternativa supremumbeskrivningen

$$K_\Omega(z) = \sup\{\, |f(z)|^2 \,;\; f \in L^2_h(\Omega)\,,\; \|f\|_\Omega \le 1 \,\}\,, \qquad z \in \Omega\,.$$

För varje $w \in \Omega$ inför vi också den *plurikomplexa Green-funktionen* med logaritmisk pol i w som ges av

$$g_\Omega(z,w) = \sup\{u(z)\}\,, \qquad z \in \Omega\,,$$

där supremum tas över alla negativa plurisubharmoniska funktioner u på Ω sådana att $u(\cdot) - \log\|\cdot - w\|$ är uppåt begränsad nära w. För varje negativ konstant t låter vi sedan $A_{w,t} = \{z \in \Omega; g_\Omega(z,w) < t\}$ vara motsvarande subnivåmängd för $g_\Omega(\cdot, w)$. Vår diskussion kommer att ha som utgångspunkt följande lokaliseringssats för Bergman-funktionen, som nyligen bevisats av Peter Pflug och Włodzimierz Zwonek.

Sats: *Låt Ω vara ett pseudokonvext område. Anta att det för varje randpunkt $p \in \partial\Omega$ finns två positiva tal r och R samt ett negativt tal t så att $A_{w,t} \subset \Omega \cap \mathbf{B}(p,R)$ för varje $w \in \Omega \cap \mathbf{B}(p,r)$. Då existerar en konstant $C = C(R,t)$ sådan att*

$$C^{-1} K_W(z) \le K_\Omega(z) \le K_W(z)\,, \qquad \text{för alla } z \in W \cap \mathbf{B}(p,r)\,,$$

där W är en sammanhängande komponent av $\mathbf{B}(p,R) \cap \Omega$.

Vi ska sedan berätta något om hur denna typ av resultat kan ge tillräckliga villkor för att ett pseudokonvext område Ω ska vara ett $L^2_h(\Omega)$-holomorfiområde.

Litteraturhänvisningar

Marius Irgens Continuation of L^2-holomorphic functions
Mathematische Zeitschrift **247** (2004) 611–617

Peter Pflug & Włodzimierz Zwonek Bergman completeness of unbounded Hartogs domains *Nagoya Mathematical Journal* **180** (2005) 121–133

Christer Kiselman

Urban Cegrells matematik

I detta föredrag kommer jag att presentera några av Urban Cegrells viktigaste matematiska resultat. Han försvarade sin doktorsavhandling vid Uppsala universitet 1975-05-23, för 28 år sedan. Den hette *Removable singularities of plurisubharmonic functions and related problems*. Opponent var Pierre Lelong. Urban stannade kvar i Uppsala till 1984, var i Umeå 1984—1996, sedan som professor vid University of Canterbury i Christchurch 1996–1997 och delar nu sedan 1997 sin tid som professor i Sverige mellan Umeå och Sundsvall.

En enkel statistik visar på en forskare med en ovanlig förmåga att samarbeta: Urban har inte mindre än tolv medförfattare till sina publikationer. De är Christer Kiselman (1970), Leif Persson (1992, 1997, 2002), Azim Sadullaev (1992), Sławomir Kołodziej (1993, 1994, 1998, 1999, 2002), Evgeny Poletsky (1995), Johan Thorbiörnson (1996), Hiroshi Yamaguchi (1996, 2001), Magnus Carlehed (1999), Frank Wikström (1999), Natalia Usova (2002), Per-Olof Westlund (2002) och Ahmed Zeriahi (2003). Han har handlett sju forskare till doktorsexamen: Johan Thorbiörnson 1989, Ulf Backlund 1992, Leif Persson 1992, Anders Fällström 1994, Magnus Carlehed 1998, Frank Wikström 1999 och Per Åhag 2002.

Ett första forskningstema var studiet av utvidgningar av plurisubharmoniska funktioner. Låt oss ta två öppna mängder Ω och ω i $\mathbf{C}^n$ med $\omega \subset \Omega$, och låt R vara restriktionen $R\colon \mathrm{PSH}(\Omega) \to \mathrm{PSH}(\omega)$. Det är naturligt att fråga om R är injektiv eller surjektiv. Man säger att $P = \Omega \setminus \omega$ är en *hävbar singularitetsmängd* om R är bijektiv. Urban visade 1975 att R är injektiv om och endast om man har $\limsup_{z \in \omega, z \to a} f(z) = f(a)$ för alla $a \in \Omega$ och alla $f \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Det finns alltid en största mängd till vilken alla plurisubharmoniska funktioner kan utvidgas entydigt. Om R är injektiv men inte surjektiv, så är dess bild mager. Dessa är några resultat från doktorsavhandlingen. Men saker och ting är inte alltid enkla: Det finns en sluten mängd P i $\Omega = \mathbf{C}^n$ sådan att varje funktion som är plurisubharmonisk och kontinuerlig i $\omega = \mathbf{C}^n \setminus P$ och lokalt begränsad uppåt nära P är i bilden av R. Men R är inte injektiv.

Ett andra tema som Urban tog upp är diskontinuiteten hos Monge–Ampère-operatorn, som visar hur svår denna icke-lineära operator är. Han visade 1983 det mycket besvärande resultatet att det finns en följd (u_j) av kontinuerliga plurisubharmoniska funktioner i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{C}^2$ som går mot u i $L^p(\Omega)$ för alla $p \in [1, +\infty[$, men ändå är sådan att $M(u_j)$ inte konvergerar mot $M(u)$ för topologin $\sigma(\mathcal{D}'_{(2,2)}, \mathcal{D}(\Omega))$.

Ett nytt stort tema för Urbans forskning är den *plurikomplexa energin* hos en funktion, som han införde 1998. Han gjorde det för att kunna utvidga Monge–Ampère-operatorn till större rum än $\mathrm{PSH} \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}$, vilket är önskvärt men svårt. Han definierar två konvexa koner, kallade $\mathcal{E}_p(\Omega)$ och $\mathcal{F}_p(\Omega)$, på vilka M är väldefinierad, $1 \le p < +\infty$. Funktionerna i $\mathcal{E}_1(\Omega)$ är de med *ändlig plurikomplex energi* – detta förklarar titeln på hans uppsats i *Acta Mathematica* 1998. Urban bestämmer precis när Monge–Ampère-ekvationen $M(u) = \mu$ har en lösning $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$. Han förutsätter här, vilket är naturligt, att Ω är en öppen, begränsad, sammanhängande och hyperkonvex mängd i $\mathbf{C}^n$.

Dessa och flera andra resultat kommer jag att försöka beskriva.

Anca Popa–Fischer

Om likhet mellan funktionsklasserna q-PSH och q-WPSH

Eftersom de plurisubharmoniska funktionerna i $\mathbf{C}^n$ har visat sig vara mycket användbara, till exempel för lösningen av Levi-problemet, har det gjorts åtskilliga försök att överföra definitionen av dessa funktioner även till komplexa rum med singulariteter. Hans Grauert och Reinhold Remmert var först med att införa dem 1956 genom att utvidga en av flera ekvivalenta definitioner av plurisubharmoniska funktioner i $\mathbf{C}^n$. John Erik Fornæss och Raghavan Narasimhan har sedemera döpt om denna klass av funktioner till *svagt plurisubharmoniska funktioner*, här fökortat $WPSH$.

År 1968 introducerade sedan Rolf Richberg vad han kallade pseudokonvexa funktioner på komplexa rum. Dessa funktioner kallas nu i Fornæss och Narasimhans terminologi helt enkelt för plurisubharmoniska funktioner, förkortat PSH. Richberg noterade att det är klart att på varje komplext rum gäller inklusionen $PSH \subset WPSH$. Han ställde frågan om även omvändningen gäller. Fornaess och Narasimhan visade 1980 att svaret på den frågan är "ja".

I detta föredrag ger vi ett nytt bevis för likheten $PSH = WPSH$, men bara för kontinuerliga funktioner, eftersom beviset i detta fall är kortare och enklare och dessutom har fördelen att kunna generaliseras till fallet med de så kallade q-plurisubharmoniska funktionerna, som infördes av Louis Hunt och John Murray år 1978. Det motsvarande begreppet svagt q-plurisubharmoniska funktioner studerades av Osamu Fujita, som kallade dem "pseudokonvexa funktioner av ordning $n-q$". Vi påminner om att en uppåt halvkontinuerlig funktion i $\mathbf{C}^n$ sägs vara q-plurisubharmonisk $(1 \leq q \leq n)$ om dess restriktion till varje q-dimensionellt komplext plan är subpluriharmonisk, det vill säga att den lokalt majoreras av pluriharmoniska funktioner. Med 1-plurisubharmonisk avses således plurisubharmonisk i vanlig mening.

Som ett steg på vägen erhåller vi en generalisering av en sats av Yum-Tong Siu. Närmare bestämt visar vi att varje q-fullständigt delrum med hörn i ett komplext rum tillåter en q-fullständig omgivning med hörn. Detta resultat använder vi sedan i beviset av satsen.

Litteraturhänvisning

ANCA POPA–FISCHER A generalization to the q-convex case of a theorem of Fornæss and Narasimhan *The Michigan Mathematical Journal* **50** (2002) 483–492

Yang Xing

Komplexa Mong–Ampère-ekvationer med singulära mått

Den icke-linjära komplexa Monge–Ampère-operatorn $(dd^c)^n$ är en naturlig motsvarighet till Laplace-operatorn i klassisk potentialteori. En intressant frågeställning angående denna operator är följande: Vilka positiva mått är Monge–Ampère-mått av plurisubharmoniska funktioner? En väsentlig komplikation är i detta sammanhang det faktum att $(dd^c)^n$ inte kan definieras på rimligt sätt för alla obegränsade plurisubharmoniska funktioner. Stor möda har därför lagts ned på att utvidga operatorns definitionsmängd till olika viktiga delklasser av obegränsade plurisubharmoniska funktioner, och det är bland annat känt att $(dd^c u)^n$ är ett väldefinierat Borel-mått för alla $u \in PSH(\Omega)$ som är begränsade nära randen $\partial\Omega$.

Vi presenterar ett tillräckligt villkor som garanterar att den komplexa Monge–Ampère-ekvationen $(dd^c u)^n = \mu$ är lösbar i klassen av plurisubharmoniska funktioner med begränsade randvärden i ett begränsat strikt pseudokonvext område $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Det visar sig vara naturligt för detta ändamål att betrakta klassen $\mathcal{B}$ av funktioner $u \in PSH(\Omega)$ som är begränsade nära randen och vars Monge–Ampère-mått $(dd^c u)^n$ är absolutkontinuerliga med avseende på Bedford–Taylor-kapaciteten C_n. Vårt tillräckliga villkor för lösbarhet kan då formuleras på följande vis.

Om ett positivt mått μ uppfyller olikheten $\mu \le (dd^c v)^n$ på Ω, för någon funktion $v \in \mathcal{B}$, så existerar en funktion $u \in \mathcal{B}$ som uppfyller $(dd^c u)^n = \mu$ i Ω.

Vi diskuterar också ett slags uppdelningssats för Monge–Ampère-mått. Närmare bestämt visar vi att om u är en plurisubharmonisk funktion i Ω sådan att den polära mängden $\{z \in \Omega : u = -\infty\}$ är sluten, så kan Monge–Ampère-måttet $(dd^c u)^n$ skrivas som en summa av två positiva mått

$$(dd^c u_1)^n + (dd^c u_2)^n,$$

där u_1 och u_2 är plurisubharmoniska funktioner i Ω, sådana att måttet $(dd^c u_1)^n$ är absolutkontinuerligt med avseende på kapaciteten C_n på varje delmängd $E \Subset \Omega$, medan $(dd^c u_2)^n$ har sitt stöd på den pluripolära mängden $\{u = -\infty\}$.

Litteraturhänvisningar

Yang Xing Complex Monge-Ampère measures of plurisubharmonic functions with bounded values near the boundary *Canadian Journal of Mathematics* **52** (2000) 1085–1100

Yang Xing Decomposition of complex Monge–Ampère measures *Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Mathematics* [To appear]

Vyacheslav Zahariuta

Några tillämpningar av pluripotentialer på approximationer

Låt K vara en kompakt mängd på en plurireguljär Stein-mångfald D. Vi säger att K är D-inställbar om Siciak-pluripotentialen $\omega(D,K;z)$ kan approximeras (likformigt på kompakta delmängder av $D \setminus K$) med multipolära pluripotentialer med isolerade logaritmiska singulariteter. Vi kommer att ha användning av följande beteckningar:

- $A(E)$ står för det lokalkonvexa rummet av analytiska funktioner (groddar) på $E \subset D$,
- A_K^D består av restriktionerna $f|_K$ av $f \in A(D)$ med $\sup_{z\in D}\{|f(z)|\} \leq 1$,
- $d_s(A_K^D)$ betecknar Kolmogorov-bredderna av A_K^D för den likformiga normen på K.

Låt oss påminna om att Kolmogorov-bredderna av en kompakt mängd A i ett normerat linjärt rum X ges av talen $d_s(A) = \inf_L \sup_{x\in A} \inf\{\|x-y\| : y \in L\}$, där L genomlöper mängden av alla s-dimensionella delrum av X.

Vi kommer i föredraget att diskutera några tillämpningar av pluripotentialer inom approximationsteorin, med koppling till Andrej Kolmogorovs problem rörande den starka asymptotiken

$$\log d_s(A_K^D) \sim -\sigma s^{1/n}, \quad s \to \infty.$$

Jag framförde 1984 en förmodan om att en multidimensionell version av Kolmogorovs förmodan borde vara giltig. Närmare bestämt att asymptotiken ovan är sann (under vissa naturliga antaganden om K och D) med konstanten

$$\sigma = 2\pi\left(n!/C(K,D)\right)^{1/n},$$

där $C(K,D)$ betecknar Bedford–Taylor-kapaciteten av K med avseende på D. Dessutom bevisade jag själv att för vissa par av Hilbert-rum (H_0, H_1), som medger kontinuerliga linjära inbäddningar $H_1 \subset A(D) \subset A(K) \subset H_0$, så gäller asymptotiken $\log d_s(B_{H_1}, H_0) \sim -\sigma s^{1/n}$ med ovanstående konstant, för varje D-inställbar kompakt K.

Detta result har nu fått en ny innebörd, i ljuset av de insatser som nyligen gjorts av Stéphanie Nivoche och Evgeny Poletsky. De har nämligen visat att K är D-inställbar för varje plurireguljärt par (K,D). Några närliggande extremalproblem för pluripotentialer kommer också att tas upp.

Litteraturhänvisningar

STÉPHANIE NIVOCHE Proof of a conjecture of Zahariuta concerning a problem of Kolmogorov on the ϵ-entropy *Inventiones mathematicae* **158** (2004) 413–450

VYACHESLAV ZAHARIUTA Spaces of analytic functions and complex potential theory *Linear Topological Spaces and Complex Analysis* **1** (1994) 74–146

Zbigniew Błocki

Om definitionen av den komplexa Monge–Ampère-operatorn för icke-släta plurisubharmoniska funktioner

Den komplexa Monge–Ampère-operatorn M definieras för en slät plurisubharmonisk funktion u genom

$$M(u) = \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right).$$

Enligt ett exempel av Bernard Shiffman och Alan Taylor, sedermera förenklat av Christer Kiselman, är det välkänt att denna operator inte kan vara väldefinierad som ett reguljärt Radon-mått för en godtycklig plurisubharmonisk funktion. Å andra sidan låter sig detta göras för lokalt begränsade plurisubharmoniska funktioner, vilket visats av Taylor tillsammans med Eric Bedford. Operatorn är då kontinuerlig (i svag* mening) med avseende på avtagande följder.

I ljuset av detta är det naturligt att ge följande beskrivning av den klass $\mathcal{D}(\Omega)$ av plurisubharmoniska funktioner i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, för vilka den komplexa Monge–Ampère-operatorn M kan definieras. Vi säger att u tillhör $\mathcal{D}(\Omega)$ om det existerar ett reguljärt Radon-mått μ i Ω sådant att för varje öppen $\Omega' \subset \Omega$ och varje följd av släta plurisubharmoniska funktioner u_j som avtar mot u i Ω' så gäller svag* konvergens $M(u_j) \to \mu$ i Ω'. Huvudmålet i detta föredrag är att exakt karakterisera definitionsmängden $\mathcal{D}(\Omega)$. Närmare bestämt presenterar vi följande resultat:

Om Ω är en öppen delmängd av $\mathbf{C}^2$ så gäller $\mathcal{D}(\Omega) = PSH \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Här betecknar $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ som vanligt Sobolev-rummet av funktioner vars partiella derivator av första ordningen är lokalt kvadratiskt integrerbara.

Ett av de viktigaste stegen i beviset av denna sats är en tillämpning av ett nytt resultat av Urban Cegrell. Vi kommer också att diskutera vissa delresultat och konjekturer i högre dimensioner.

Litteraturhänvisning

Zbigniew Błocki On the definition of the Monge–Ampère operator in $\mathbf{C}^2$
Mathematische Annalen **328** (2004) 415–423

László Lempert

Analytisk kohomologi i oändligtdimensionella rum

I detta föredrag kommer vi att ta upp den senaste tidens utveckling vad gäller utvidgandet av Stein-teorin från det ändligtdimensionella till det oändligtdimensionella fallet. Den aspekt av Stein-teorin som vi fokuserar på är allmänna kohomologiska försvinnandesatser. Eftersom det för närvarande inte existerar någon övertygande definition av vad en oändligtdimenionell Stein-mångfald skulle vara, så begränsar vi oss till fallet med pseudokonvexa öppna mängder, och då främst i Banach-rum.

Det är inget problem att definiera pseudokonvexitet i oändlig dimension: ett område Ω i ett Banach-rum X sägs vara pseudokonvext om snittet $\Omega \cap Y$ är pseudokonvext för varje affint delrum $Y \subset X$ av ändlig dimension. Detta är ekvivalent med villkoret att funktionen $-\log \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ är plurisubharmonisk. Speciellt är konvexa områden pseudokonvexa.

Ett viktigt verktyg som inte står till buds när man arbetar i oändlig dimension är uttömning av Ω med lämpliga (exempelvis holomorfkonvexa) kompakter, alltså detta att kunna skriva Ω som en växande union av kompakta delmängder $K \subset \Omega$. Klyftan mellan lokalt och globalt är således mycket bredare i oändlig än i ändlig dimension, där kompakta mängder ju bildar ett slags bro dem emellan. Kohomologiska försvinnandesatser utgör naturligtvis också en länk från lokal till global information, men man kan med rätta säga att i det oändligtdimensionella fallet är gapet som måste överbryggas väsentligt större.

Låt $E \to \Omega$ vara en holomorf vektorbunt vars fibrer är isomorfa med Banach-rum, och betrakta de kärvkohomologiska grupperna $H^q(\Omega, E)$. Frågan är huruvida dessa grupper försvinner för $q > 0$. Detta skulle mycket väl kunna vara sant helt allmänt, men vi kan bara bevisa det under antagandet att X har en villkorslös bas, något som de flesta klassiska Banach-rum också har. Vi ska diskutera huvudidéerna i beviset av följande sats:

Låt X vara ett Banach-rum med en villkorslös bas, $\Omega \subset X$ öppen och pseudokonvex, och $E \to \Omega$ en holomorf vektorbunt med fibrer som är isomorfa med Banach-rum. För $q > 0$ gäller då $H^q(\Omega, E) = 0$.

Litteraturhänvisning

László Lempert Vanishing cohomology for holomorphic vector bundles in a Banach setting *The Asian Journal of Mathematics* **8** (2004) 65–85

Judith Brinkschulte

Att fästa Riemann-ytor vid totalt reella torusar i $\mathbf{C}^2$

Ett klassiskt problem i komplex analys är att givet en kompakt mängd X i $\mathbf{C}^n$ beskriva dess polynomiella hölje $\hat{X}$ och likaså dess rationella hölje $r(X)$. För varje sluten n-dimensionell Lagrangesk delmångfald $L \subset \mathbf{C}^n$ utan rand bevisades det av Mikhael Gromov att det existerar en icke-konstant holomorf skiva Σ vars rand är innehållen i L. Speciellt följer det därmed från maximumprincipen att det polynomiella höljet av L måste innehålla Σ.

I fallet med en totalt reell delmångfald S är existensen av en sådan holomorf skiva inte säkerställd. Genom att vidareutveckla Gromovs metod visade Herbert Alexander följande resultat: För varje kompakt totalt reell (n-dimensionell) delmångfald $S \subset \mathbf{C}^n$ finns det en icke-konstant nästan slät holomorf skiva med rand i S. Mer precist existerar det en begränsad icke-konstant holomorf avbildning $f\colon D \to \mathbf{C}^n$, där D är enhetsskivan i $\mathbf{C}$, med egenskaperna $f \in C^\infty(\bar{D} \setminus \{1\})$ och $f(\partial D \setminus \{1\}) \subset S$. I ett senare arbete gav Alexander också ett explicit exempel på en totalt reell torus i $\mathbf{C}^2$ som inte begränsar någon (slät) analytisk skiva.

Det är ett klassiskt faktum att om Σ är en Riemann-yta som har sin rand innehållen i S, så gäller $\Sigma \subset r(S)$. Det är dock möjligt att $r(S) \setminus S$ är icke-tom trots att ingen sådan Riemann-yta Σ existerar.

Om S är en kompakt totalt reell delmångfald av dimension n i $\mathbf{C}^n$ så kan S inte vara rationellt konvex. Ett resultat av Julien Duval och Nessim Sibony säger nämligen att $r(S) = S$ om och endast det finns en Kähler-form ω i $\mathbf{C}^n$ sådan att $j^*\omega = 0$ på S, där j betecknar inklusionsavbildningen $S \hookrightarrow \mathbf{C}^n$. Om alltså S uppfyller $r(S) = S$ så följer det från Gromovs resultat att det existerar en holomorf skiva med rand i S, så S är inte rationellt konvex.

Det är således av intresse att avgöra om det alltid existerar en Riemann-yta Σ med rand på en godtycklig totalt reell delmångfald S av dimension n i $\mathbf{C}^n$. Duval och Sibony har givit partiella svar på denna fråga, och Claude Viterbo har visat att för varje omgivning U till S existerar det en Riemann-yta med randen innehållen i U. Målet med detta föredrag är att ge ett L^2-bevis av följande resultat för torusar i $\mathbf{C}^2$.

Låt S vara en kompakt totalt reell torus i C^2 av reell dimension 2. Då finns en Riemann-yta Σ med rand $\partial\Sigma \subset S$.

Litteraturhänvisningar

HERBERT ALEXANDER Disks with boundaries in totally real and Lagrangian manifolds *Duke Mathematical Journal* **100** (1999) 131–138

JULIEN DUVAL & NESSIM SIBONY Hulls and positive closed currents *Duke Mathematical Journal* **95** (1998) 621–633

Mats Andersson

Residyströmmar av holomorfa sektioner

Låt $E \longrightarrow X$ vara en holomorf hermitsk vekorbunt av rang m. För varje holomorf sektion f till den dual bunten E^* definierar vi en residyström $R^f = \sum R^f_\ell$ med stöd på nollställemängden $Z^f = \{f = 0\}$, och med värden i bunten $\bigoplus \Lambda^k T^*_{0,1} \otimes \Lambda^k E$. Vi ska diskutera grundläggande egenskaper hos residyströmmen R^f och även en del tillämpningar.

Om $p = \operatorname{codim}\{f = 0\}$, så har man

$$R^f = R^f_p + \cdots + R^f_m,$$

och i specialfallet då f är ett fullständigt snitt (det vill säga att $p = m$) så är $R^f = R^f_m$ oberoende av metriken på E. I själva verket kan R^f då skrivas som

$$[\bar\partial \frac{1}{f_m} \wedge \ldots \wedge \bar\partial \frac{1}{f_1}] \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m,$$

där $\{e_j\}$ är en lokal holomorf ram för E och $[\bar\partial(1/f_m) \wedge \ldots \wedge \bar\partial(1/f_1)]$ är den vanliga Coleff–Herrera-strömmen, med $f = f_1 e_1^* + \ldots + f_m e_m^*$ uttryckt i den duala ramen $\{e_j^*\}$

Om ϕ är holomorf och $\phi R^f = 0$ så tillhör ϕ (lokalt) idealet genererat av f. Några globala varianter av detta resultat kommer att tas upp, liksom tillämpningar med koppling till Hilberts nollställesats.

Med hjälp av R^f kan vi (i ett pseudokonvext område $D \subset \mathbf{C}^n$) konstruera en formel för division och interpolation:

$$\phi = f \cdot T\phi + S(\phi),$$

där $S(\phi)$ bara beror på $R^f\phi$. Det visar sig att $S(\phi)$ ger upphov till en holomorf fortsättning till D av elementet ϕ i $\mathcal{O}/I_f$.

Utgående från R^f kan vi sedan bilda (k,k)-strömmar M^f_k med stöd på Z^f, sådana att M^f_m representerar den högsta Chern-klassen för E^*, och $M^f_p = \sum \alpha_j [Z_j]$, där Z_j betecknar de irreducibla komponenterna till Z^f av kodimension p, det vill säga av högsta dimension.

Litteraturhänvisning

Mats Andersson Residue currents and ideals of holomorphic functions *Bulletin des Sciences Mathématiques* **128** (2004) 481–512