NORDAN ÅTTA

Nösunds Värdshus på Orust, 14-16 maj 2004

ANDRA gången Nordan-konferensen arrangerades av Göteborg hade man valt att förlägga den till *Nösunds Värdshus & Orangerie* på södra Orust – ett ringa stenkast från havet. Här erbjöds varierande inkvartering varvid somliga deltagare inhystes i mysiga sjöbodar. Vädrets makter bjöd på solsken och tillfälle att njuta av vackra bohuslänska solnedgångar. Några mer frisksportiga deltagare dristade sig till ett dopp i det kylslagna havet medan andra föredrog stillsamt varmbad i träkar. Den vetenskapliga aktiviteten omfattade tio föredrag och vid sidan av dessa fanns gott om utrymme för mer spontana diskussioner under härliga strandpromenader och läckra måltider.

DELTAGARE

Lev Aizenberg (Ramat-Gan)
Dmitri Akhiezer (Moskva)
Mats Andersson (Göteborg)
Jockum Aniansson (Stockholm)
Jim Arlebrink (Borås)
Berit Bengtson (Umeå)
Lennart Berglind (Uppsala)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jan-Erik Björk (Stockholm)
Jan Boman (Stockholm)
Jörgen Boo (Sundsvall)
Stefan Borell (Sundsvall)
Hasse Carlsson (Göteborg)
Urban Cegrell (Umeå/Sundsvall)
Tomas Edlund (Uppsala)
Salla Franzén (Uppsala)
Anders Fällström (Umeå)
Josip Globevnik (Ljubljana)
Elin Götmark (Göteborg)
David Jacquet (Stockholm)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Frank Kutzschebauch (Sundsvall)
Andreas Lind (Sundsvall)
Niklas Lindholm (Lund)
Sam Lodin (Sundsvall)
Erik Løw (Oslo)
Klas Markström (Umeå)
Stéphanie Nivoche (Toulouse)
Myriam Ounaïes (Strasbourg)
Mikael Passare (Stockholm)
Henrik Petersson (Göteborg)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Juhani Riihentaus (Villmanstrand)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Hans Rullgård (Stockholm)
Håkan Samuelsson (Göteborg)
Nikolay Shcherbina (Göteborg)
Alexej Schuplev (Stockholm)
Ragnar Sigurdsson (Reykjavik)
Berit Stensønes (Ann Arbor)
Alexandre Sukhov (Lille)
Vyacheslav Trutnev (Krasnojarsk)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Alekos Vidras (Nicosia)
Martin Weimann (Bordeaux)
John Wermer (Providence)
Jan Wiegerinck (Amsterdam)
Jonas Wiklund (Umeå)
Erlend Fornæss Wold (Oslo)
Elizabeth Wulcan (Göteborg)
Yang Xing (Umeå)
Alain Yger (Bordeaux)
Nils Øvrelid (Oslo)

[53 personer]

PROGRAM

Fredag 14 maj

15.00-15.45 John Wermer *Rational approximation on the unit sphere in* $\mathbf{C}^2$
16.00-16.45 Hans Rullgård *Amoebas in complex geometry*

Lördag 15 maj

09.15-10.00 Anders Fällström *Finitely generated ideals and the Gleason problem*
10.15-11.00 Stéphanie Nivoche *On the pluricomplex Green function in* $\mathbf{C}^n$
11.15-12.00 Josip Globevnik *Analyticity on circles*
14.00-14.45 Alain Yger *Multidimensional residue currents as a tool for intersection or division theory?*
15.00-15.45 Jan-Erik Björk *Residue currents and* $\mathcal{D}$*-modules on complex manifolds*

Söndag 16 maj

09.15-10.00 Berit Stensønes *The Michael problem revisited*
10.15-11.00 Alexandre Sukhov *Some aspects of analysis on almost complex manifolds*
11.15-12.00 Jan Wiegerinck *The pluripolar hull of a graph*

ARRANGÖRER

Mats Andersson och Nikolay Shcherbina

FINANSIÄRER

Vetenskapsrådet
Axel Wenner–Grens stiftelse för internationellt forskarutbyte
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

John Wermer
Rationell approximation på enhetssfären i $\mathbf{C}^2$

Givet en kompakt delmängd $X \Subset \mathbf{C}^n$ betecknar vi med $R(X)$ den likformiga tillslutningen på X av rummet av rationella funktioner på $\mathbf{C}^n$ som är reguljära på X. När har man $R(X) = C(X)$?

I fallet med en komplex variabel och en kompakt delmängd $K \Subset \mathbf{C}$ har man ett klassiskt resultat från 1920-talet av Friedrich Hartogs och Artur Rosenthal som säger att $R(K) = C(K)$ så snart $m_2(K) = 0$, där m_j betecknar det vanliga j-dimensionella måttet.

Vi ersätter $\mathbf{C}$ med enhetssfären $S \subset \mathbf{C}^2$, och fixerar en kompakt delmängd K av S. Vi antar att K är rationellt konvex, eftersom detta uppenbarligen är ett nödvändigt villkor för $R(K) = C(K)$.

Förmodan: *Om $m_3(K) = 0$ så gäller $R(K) = C(K)$.*

Vi presenterar ett geometriskt villkor på K under vilket vår förmodan är sann. Låt, för varje $\varepsilon > 0$, mängden Ω_ε ges av de punkter på S vars euklidiska avstånd till K är $\leq \varepsilon$, och låt $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ beteckna det rationellt konvexa höljet av Ω_ε. För varje punkt (z, w) i det öppna enhetsklotet låter vi sedan $\varepsilon(z, w)$ vara det minsta positiva tal sådant att $(z, w) \in \widehat{\Omega}_\varepsilon$.

Sats: *Anta $K \subset S$ är en rationellt konvex mängd med $m_3(K) = 0$, och att det för nästan varje z i enhetsskivan existerar ett tal $p > 0$ sådant att*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{\left[\varepsilon(z, r \exp i\phi)\right]^p} = O(1), \quad r \to \sqrt{1 - |z|^2}.$$

Då gäller $R(K) = C(K)$.

Ett väsentligt hjälpmedel i beviset är vissa egenskaper hos en integralkärna på sfären som härrör från ett arbete av Gennadi Henkin från 1970-talet. Denna kärna, som här spelar den roll som Cauchy-kärnan spelar i $\mathbf{C}$, har utseendet $H(\zeta, z) = A/B$ där $A = \bar{\zeta}_1 \bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2 \bar{z}_1$, $B = |1 - (\zeta, z)|^2$ och $(\cdot, \cdot)$ betecknar den vanliga hermiteska inre produkten på $\mathbf{C}^2$. Givet ett ändligt komplext mått μ med stöd på S betraktar vi transformen

$$K_\mu(\zeta) = \int_S H(\zeta, z)\, d\mu(z),$$

som är integrerbar över S och slät på $S \setminus \operatorname{supp} \mu$.

Litteraturhänvisning

John Wermer Rationally convex sets on the unit sphere in $\mathbf{C}^n$
Arkiv för matematik **46** (2008) 183–196

Hans Rullgård

Amöbor i komplex geometri

Betrakta ett Laurent-polynom i n komplexa variabler

$$f(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha ,$$

där A är en ändlig delmängd av $\mathbf{Z}^n$ och $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. Då definieras den så kallade *Newton-polytopen* för f som det konvexa höljet P_f av A i $\mathbf{R}^n$. *Amöban* av f definieras sedan som mängden

$$\mathcal{A}_f = \operatorname{Log}\big(\{z \in (\mathbf{C} \setminus 0)^n ; f(z) = 0\}\big) \subset \mathbf{R}^n ,$$

där avbildningen Log ges av $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$. Varje sammanhängande komponent av amöbakomplementet $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ är en öppen konvex mängd, och mängden av sådana komponenter står i ett-till-ett-korrespondens med mängden av konvergenta Laurent-serieutvecklingar av $1/f$. Dessutom råder en naturlig ett-till-ett-korrespondens mellan komplementkomponenterna och en delmängd av $P_f \cap \mathbf{Z}^n$.

Amöban kan approximeras med hjälp av en styckvis linjär mängd $\mathcal{S}_f$, som kallas för amöbans *ryggrad*. Ryggraden är en tropisk varietet som definieras av det tropiska polynomet

$$g(x) = \max_{\alpha \in A'} \big(c_\alpha + \langle \alpha, x \rangle\big)$$

där A' betcknar den delmängd $P_f \cap \mathbf{Z}^n$ som består av de index α som motsvarar komponenterna av $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$. I vissa fall kan koefficienterna c_α beräknas genom serieutvecklingen

$$c_\alpha = \log|a_\alpha| + \operatorname{Re} \sum_{k \in K_\alpha} \frac{(-k_\alpha - 1)!}{\prod_{\beta \neq \alpha} k_\beta !} (-1)^{k_\alpha - 1} \prod_{\beta \in A} a_\beta^{k_\beta} ,$$

där summationsmängden ges av

$$K_\alpha = \Big\{ k \in \mathbf{Z}^A ;\ k_\alpha < 0,\ k_\beta \geq 0 \text{ om } \beta \neq \alpha,\ \sum_{\beta \in A} k_\beta = 0,\ \sum_{\beta \in A} \beta k_\beta = 0 \Big\} .$$

Speciellt, om α är ett hörn av Newton-polytopen P_f, fås $c_\alpha = \log|a_\alpha|$, men i allmänhet är c_α (realdelen av) en generaliserad hypergeometrisk funktion av samtliga koefficienter a_β.

Litteraturhänvisning

MIKAEL PASSARE & HANS RULLGÅRD Amoebas, Monge–Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope *Duke Mathematical Journal* **121** (2004) 481–507

Anders Fällström

Ändligt-genererade ideal och Gleason-problemet

Ett känt problem som har sitt ursprung i påvisandet av analytisk struktur i spektrumet till en Banach-algebra, och som formulerades av Andrew Gleason 1964, är följande:

Givet ett begränsat område $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, låt $A(\Omega)$ beteckna de holomorfa funktioner på Ω som är kontinuerliga på $\overline{\Omega}$ och fixera en punkt $p \in \Omega$. Är det maximalideal i $A(\Omega)$ som består av de funktioner som försvinner i p algebraiskt genererat av funktionerna $z_1 - p_1, ..., z_n - p_n$?

Om det är så att idealet är genererat av dessa funktioner, sägs området ha Gleason-egenskapen i punkten p.

Ett antal matematiker har arbetat med Gleason-problemet. Det löstes i strikt pseudokonvexa områden av Gennadi Henkin, Norberto Kerzman, Alexander Nagel, Nils Øvrelid samt Ingo Lieb. År 1983 publicerade Øvrelid tillsammans med John Erik Fornæss ett positivt resultat för pseudokonvexa områden i $\mathbf{C}^2$ med reellanalytisk rand. För högre dimensioner är det fortfarande ett öppet problem, och detsamma gäller för områden av ändlig typ, där Alan Noell 1985 kunde ge ett positivt resultat i $\mathbf{C}^2$.

För pseudokonvexa Reinhardt-områden som innehåller origo, och har C^2-rand, har Gleason-egenskapen verifierats av Ulf Backlund och Anders Fällström. Oscar Lemmers och Jan Wiegerinck har generaliserat detta resultat till allmänna Reinhardt-områden med C^2-rand och till Reinhardt-områden med en spets i origo. Bevismetoderna är svåra att generalisera till högre dimensioner. Lemmers och Wiegerinck har också lyckats visa att lineellt konvexa områden har Gleason-egenskapen.

Det är lätt att se att ett område med icke-schlicht holomorfienvelopp inte kan ha Gleason-egenskapen i punkter över vilka enveloppen är flerbladig. Något mer intrikat är det att hitta pseudokonvexa områden som inte har egenskapen. Utgående från Nessim Sibonys klassiska exempel på ett pseudokonvext område som inte är H^∞-konvext kan man konstruera ett pseudokonvext område vars H^∞-envelopp inte är schlicht, och detta blir då ett exempel på ett pseudokonvext område som inte har Gleason-egenskapen. Genom att bädda in detta område i ett Hartogs-område i $\mathbf{C}^3$ kan man sedan konstruera ett H^∞-område som också saknar Gleason-egenskapen. Obstruktionen till att ett område ska sakna Gleason-egenskapen i en punkt p är i samtliga kända motexempel att det i spektrumet finns flera element som, genom projektionen $\pi(m) = (m(z_1), ..., m(z_n))$, projiceras ned på punkten p. En naturlig fråga är därför följande öppna problem:

Om det enda element i maximalidealrummet till $A(\Omega)$ som projiceras ned på $p \in \Omega$ är punktevalueringen i p, har då Ω Gleason-egenskapen i p?

Litteraturhänvisning

ULF BACKLUND & ANDERS FÄLLSTRÖM Counterexamples to the Gleason problem *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **26** (1998) 595–603

Stéphanie Nivoche

Om den plurikomplexa Green-funktionen i $\mathbf{C}^n$

Låt $K \subset \mathbf{C}^n$ vara en polynomiellt konvex kompakt. Ett enkelt kompakthetsargument visar att för varje öppen omgivning $U \supset K$ kan man finna ett ändligt antal polynom $q_1, \dots, q_k$ sådana att

$$\sup_{1 \le j \le k} |q_j(z)|/\|q_j\|_K > 1, \quad z \in \mathbf{C}^n \setminus U.$$

David Hilbert visade 1897 att i fallet $n = 1$ räcker det med ett enda polynom q. Det vill säga att för en lämpligt vald konstant $c > 0$ utgör lemniskatan $|q(z)| = c$ en kurva som "omsluter" kompakten K och samtidigt är innehållen i den öppna omgivningen U.

Ett bevis av Hilberts sats med hjälp av klassisk potentialteori ger i själva verket ett polynom q vars alla nollställen ligger i K (och till och med i ∂K). Samma bevis ger dessutom en likformig approximation av g_K, Green-funktionen för K med pol i oändligheten, med subharmoniska funktioner av formen $\log |q|/d$ på $\mathbf{C} \setminus U$. (Här är d graden hos q.)

Det är nu naturligt att formulera motsvarande problem i $\mathbf{C}^n$, alltså att försöka approximera en polynomiellt konvex kompakt K med hjälp av polynomiella polyedrar $\mathcal{P}$, givna av exakt n polynom, så att de gemensamma nollställena till dessa polynom alla är innehållna i K. Man kan visa att ett ekvivalent problem består i att likformigt approximera g_K, den plurikomplexa Green-funktionen för K med logaritmisk pol i oändligheten, med plurisubharmoniska funktioner av formen $\sup_{1 \le j \le n} \log |p_j|/d_j$ på $\mathbf{C}^n \setminus U$, där U är en godtycklig öppen omgivning av K och d_j är graden hos polynomet p_j.

Vi presenterar här ett första resultat i denna riktning: *Varje polynomiellt konvex kompakt $K \subset \mathbf{C}^n$ kan approximeras med speciella polynomiella polyedrar $\mathcal{P}$ som definieras av propra polynomavbildningar $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ med "nästan" alla sina nollställen innehållna i respektive polyeder $\mathcal{P}$.*

Som en konsekvens av detta får vi sedan följande resultat för den plurikomplexa Green-funktionen g_K: *Låt $K \subset \mathbf{C}^n$ vara en polynomiellt konvex $\mathcal{L}$-reguljär kompakt. För varje $\varepsilon > 0$ existerar då en speciell polynomiell polyeder $\mathcal{P} \supset K$ och en plurisubharmonisk funktion $w \in \mathcal{L}^+$ sådan att*

(*i*) *w har en ändlig mängd S av logaritmiska poler i $\mathcal{P}$,*

(*ii*) *w är maximal i $\mathbf{C}^n \setminus (\partial \mathcal{P} \cup S)$,*

(*iii*) *$g_K(z) - \gamma(\varepsilon) \le w(z) \le g_K(z)$ i $\mathbf{C}^n \setminus \mathcal{P}$, där $\gamma(\varepsilon) \searrow 0$ då $\varepsilon \to 0$,*

(*iv*) *$\int_{\mathcal{P}} (dd^c w)^n = \int_S (dd^c w)^n \to (2\pi)^n = \int_{\mathbf{C}^n} (dd^c w)^n$ och $\int_{\partial \mathcal{P}} (dd^c w)^n \to 0$ då $\varepsilon \to 0$.*

Litteraturhänvisning

STÉPHANIE NIVOCHE Convexité polynomiale, polyèdres polynomiaux spéciaux et applications *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* **342** (2006) 825–830

Josip Globevnik

Analyticitet på cirklar

Låt $\Gamma = \{\zeta \in \mathbf{C}\, ;\ |\zeta - a| = R\}$ vara en cirkel med medelpunkt $a \in \mathbf{C}$ och låt $\Lambda(\Gamma)$ beteckna den halva komplexa andragradskurvan

$$\{(z,w)\, ;\ (z-a)(w-\bar{a}) = R^2,\ 0 < |z-a| < R\} \subset \mathbf{C}^2,$$

som längs cirkeln $b\Lambda(\Gamma) = \{(\zeta,\bar{\zeta})\, ;\ \zeta \in \Gamma\}$ möter det reella 2-planet $\Sigma = \{(\zeta,\bar{\zeta})\, ;\ \zeta \in \mathbf{C}\}$. Häromåret observerade Mark Agranovsky och Josip Globevnik att en kontinuerlig funktion f kan utvidgas holomorft från Γ om och endast om funktionen $F(\zeta,\bar{\zeta}) = f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, har en begränsad holomorf utvidgning genom $\Lambda(\Gamma)$, och de kunde sedan utnyttja detta faktum för att studera rationella funktioner av två reella variabler som medger holomorfa utvidgningar från olika familjer av cirklar.

Om A är ett slutet ringområde i $\mathbf{C}$ låter vi $\Omega(A)$ vara unionen av alla $\Lambda(\Gamma)$ för vilka cirkeln $\Gamma \subset \mathrm{Int}A$ omger ringens hål. Detta är ett obegränsat område i $\mathbf{C}^2$ som möter Σ längs $\{(\zeta,\bar{\zeta})\, ;\ \zeta \in \mathrm{Int}\ A\}$. Ifall A har sin medelpunkt i origo så säger ett gammalt resultat av Globevnik att en kontinuerlig funktion på A kan utvidgas holomorft från alla cirklar som omger hålet precis om den utgör ett likformigt gränsvärde av en följd polynom i z and $1/\bar{z}$. Man kan nu använda maximumprincipen för att visa att en kontinuerlig funktion f på A kan utvidgas holomorft från varje sådan cirkel Γ om och endast om $F(\zeta,\bar{\zeta}) = f(\zeta)$, $\zeta \in A$, har en begränsad kontinuerlig utvidgning till $\Omega(A) \cup b\Omega(A)$ som är holomorf på $\Omega(A)$. På så vis relateras frågan om holomorf utvidgning av f från alla cirklar $\Gamma \subset A$ till frågan om holomorf utvidgning av F från $\Sigma \cap b\Omega(A)$ till $\Omega(A)$, och man leds på ett naturligt sätt till att använda sig av plurikomplexa metoder.

Funktionen $f(z) = 1/\bar{z}$ på $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ är ett exempel på en funktion som kan utvidgas holomorft från varje cirkel som omger origo, men som ändå inte är holomorf. Genom att nu använda verktyg från flera komplexa variabler, såsom kontinuitetsprincipen och satsen om kilens kant, kan vi bevisa följande sats:

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ som kan utvidgas holomorft från varje cirkel som omsluter origo. Anta dessutom att f kan utvidgas holomorft från varje cirkel i en icke-tom öppen familj av cirklar som inte omsluter origo. Då är f en hel funktion, det vill säga f är en holomorf funktion på $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ med en hävbar singularitet i punkten 0.

Litteraturhänvisning

Josip Globevnik Analyticity on families of circles
Israel Journal of Mathematics **142** (2004) 29–45

Alain Yger

Flerdimensionella residyströmmar som ett verktyg för snitt-teori eller division?

Givet en kvasireguljär följd (repsektive ett fullständigt snitt) i en kommutativ ring R definierar man en algebraisk (respektive analytisk) residy via en spårkonstruktion. I det algebraiska fallet, där Joseph Lipman varit en av förgrundsgestalterna, är det dock så att residysymbolen som hör till en kvasireguljär följd $(f_1, \ldots, f_p)$ inte definieras ensam, utan tillsammans med hela listan av residysymboler hörande till följderna $(f_1^{1+k_1}, \ldots, f_p^{1+k_p})$, $k \in \mathbf{N}^p$. Man utgår därvid från en linjär sektion σ till projektionen $\pi \colon R \to R/fR$. En speciell sådan sektion ges av Kroneckers spårformel och denna leder till vidareutvecklingar av Bergman–Weils formler.

Många av nyckelresultaten inom flerdimensionell residykalkyl inbegriper just sådana följder av potenser. Ett exempel är den generaliserade versionen av Briançon–Skodas sats: $\overline{I^{n+p-1}} \subset I^p$, där p är ett positivt heltal och I ett ideal i en reguljär lokal ring $\mathcal{O}$. Lägg märke till att Briançon–Skodas sats spelar en fundamental roll, exempelvis i arbeten av János Kollár, för att sammankoppla geometrisk och algebraisk snitt-teori.

Flerdimensionell residyteori kan också utvecklas inom teorin för strömmar, och en användbar metod i detta sammanhang bygger på analytisk fortsättning av distributionsvärda avbildningar $\lambda \mapsto |f_1 \cdots f_p|^\lambda \otimes \mu$, där μ är en holonom distribution i Jan-Erik Björks mening. Detta tillvägagångssätt gör det möjligt att på ett robust sätt multiplicera residyströmmar med semimeromorfa differentialformer, liksom även att definiera Abel–Radon-transformer av av sådana objekt.

En analys av hur residysymbolerna beror av ytterligare parametrar förefaller vara ett avgörande steg på vägen mot att omformulera och tydliggöra snittproblem och divisionsproblem i polynomalgebra. Som ett exempel, låt oss betrakta n poynom i $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ av grad D och låt ν_∞ vara Lojasiewicz-exponenten i oändligheten, det vill säga det minsta positiva rationella tal sådant att

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|P_j(z)|}{|z|^D} \geq \frac{1}{(1+|z|)^{\nu_\infty}}, \qquad |z| \gg 1\,.$$

Man kan verifiera att för varje naturligt tal M är villkoret $\nu_\infty \leq D + M - 1$ ekvivalent med försvinnandet av den globala residysymbolen

$$\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} \zeta^\alpha \, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ (L_1^M P_1)^{\beta_1}, \ldots, (L_n^M P_n)^{\beta_n} \end{matrix}\right]_{\mathbf{C}^n}$$

för varje $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ med $|\alpha| \leq |\beta|$ och generiska affina former $L_j = u_{j0} + u_{j1}\zeta_1 + \ldots + u_{jn}\zeta_n$.

Litteraturhänvisningar

August Tsikh & Alain Yger Residue currents
Journal of Mathematical Sciences **120** (2004) 1916–1971

Alain Yger Analytic and algebraic ideas: how to profit from their complementarity
Progress in Mathematics **238** (2004) 15–28

Jan-Erik Björk

Residyströmmar och $\mathcal{D}$-moduler på komplexa mångfalder

Detta är ett översiktsföredrag om existens av och egenskaper hos residyströmmar på en komplex mångfald X, samt om deras samspel med reguljära holonoma $\mathcal{D}_X$-moduler, där $\mathcal{D}_X$ betecknar kärven av holomorfa differentialoperatorer på X.

För varje komplex delvarietet $V \subset X$ av ren komplex kodimension k inför man den lokala kohomologikärven $H^p_{[V]}(\omega_X)$, där $p = d_X - k$ och ω_X är kärven av holomorfa former på X av maximal grad d_X. Ett huvudresultat utgörs av nedanstående isomorfi – som gäller i kategorin av reguljära holonoma $\mathcal{D}_X$-högermoduler:

$$H^p_{[V]}(\omega_X) \simeq \mathbf{CH}_V \,,$$

där $\mathbf{CH}_V$ står för kärven av Coleff–Herrera-strömmar med stöd på V. Sektionerna i denna kärve utgörs av de $\bar\partial$-slutna strömmar γ av bigrad (d_X, p) som annihileras av idealet $\bar{I}_V$ av antiholomorfa funktioner som är noll på V, och dessutom är av standardutvidgningstyp, det vill säga att man har

$$\gamma = \lim_{\epsilon \to 0} \chi_\epsilon(g) \cdot \gamma \,,$$

för varje $g \in \mathcal{O}(X)$ sådan att $V_{\text{sing}} \subset g^{-1}(0)$ och $V \setminus g^{-1}(0)$ är tät i V, och $\chi_\epsilon(g)$ betecknar den karakteristiska funktionen för mängden $\{|g| > \epsilon\}$.

Beviset av denna fundamentala isomorfi bygger på Hironakas sats om upplösning av singulariteter, och strömmarna i $\mathbf{CH}_V$ uppstår på följande sätt: Givet en holomorf funktion g som ovan, samt en holomorf k-form α vars restriktion till $V \setminus g^{-1}(0)$ är nollskild, så existerar det en ström

$$\Psi^{0,k} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V \cap \{|g| > \epsilon\}} g \cdot \alpha \wedge \Psi^{0,k} \,,$$

där $\Psi^{0,k}$ betecknar testformer av bigrad $(0,k)$ och integrationen sker på den lokalt slutna k-dimensionella komplexa delmångfalden $V \cap \{|g| > \epsilon\}$.

Vi kommer också att redogöra för en allmännare konstruktion av Masaki Kashiwara som används för att konstruera den inversa funktorn i Riemann–Hilbert-korrespondensen. Här utgår man från ett lokalt system $\mathbf{L}$ på $V \setminus g^{-1}(0)$. Det existerar då en reguljär holonom $\mathcal{D}_X$-högermodul vars sektioner utgör en vriden kärve av strömmar och vars de Rham-komplex är det $\mathbf{C}$-konstruerbara och perversa kärvkomplexet $\mathbf{R}j_*(\mathbf{L})$, där $j\colon V \setminus g^{-1}(0) \to X$ betecknar inklusionsavbildningen.

Slutligen beskriver vi hur residyströmmarna ovan kan erhållas som yttre produkter av principalvärdesströmmar i det fall då V utgör ett fullständigt snitt, eller via strömmar av Bochner–Martinelli-typ.

Berit Stensønes

Michael-problemet på nytt

År 1952 formulerade Ernest Michael följande fråga: Om A är en Fréchet-algebra (det vill säga en fullständig metriserbar topologisk algebra vars topologi ges av en växande familj av submultiplikativa seminormer) är då varje karaktär $\chi: A \to \mathbf{C}$ automatiskt kontinuerlig? I en anmärkningsvärd artikel från 1986 påvisade Peter Dixon och Jean Esterle att Michaels problem kan översättas till en fråga om holomorfa avbildningar av flera komplexa variabler.

Närmare bestämt är det så att om det för något positivt heltal n existerar en följd $\{\Phi_j\}$ av hela avbildningar $\Phi_j: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ med egenskapen att

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_j(\mathbf{C}^n) = \varnothing,$$

i så fall är svaret på Michaels fråga "ja". Det är en direkt konsekvens av Picards stora sats att ingen sådan familj exitserar för $n = 1$. För $n \geq 2$ är det däremot sedan länge välkänt att det existerar så kallade Fatou–Bieberbach-områden, alltså biholomorfa kopior av $\mathbf{C}^n$ som inte är täta i $\mathbf{C}^n$.

Tills för ett par årtionden sedan var det bara sporadiskt som man intresserade sig för Fatou–Bieberbach-områden, men på senare år har de kommit att spela en viktig roll inom den plurikomplexa dynamiken. Det har också tillkommit nya kraftfulla metoder rörande automorfier av $\mathbf{C}^n$, bland annat genom arbeten av Erik Andersén och László Lempert.

Vi ger ett positivt svar på Michaels fråga genom att för $n = 3$ konstruera en familj holomorfa avbildningar $\{\Phi_j\}$ med den av Dixon och Esterle föreskrivna egenskapen. I vårt föredrag fokuserar vi på den del av beviset som handlar om att ställa upp och lösa vissa $\bar{\partial}$-problem.

En av de ingående svårigheterna är nödvändigheten att kontrollera L^1-normen av en avskärningsfunktion definierad på ett område som kan ha en elak rand. En nyhet i förhållande till vårt tidigare tillvägagångssätt består i att vi utnyttjar en sinnrik idé som introducerats av Lars Ahlfors och som involverar vissa medelvärdesbildningar. Med hjälp av dessa kan man få de erforderliga uppskattningarna av avskärningsfunktionens L^1-norm.

Vi använder därefter en generaliserad integralkärna för att lösa $\bar{\partial}$-problemet med uppskattningar av den punktvisa normen för lösningen. Detta gör det möjligt för oss att konstruera en avbildning från ett Fatou–Bieberbach-område så att en kritisk mängd avbildas utanför ett på förhand givet klot, och denna konstruktion leder slutligen fram till en familj $\{\Omega_j\}$ av biholomorfa kopior av $\mathbf{C}^3$, med egenskapen $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ och så att snittet av alla Ω_j är tomt.

Alexandre Sukhov

Några aspekter av analys på nästan komplexa mångfalder

I detta föredrag diskuterar vi beviset av följande resultat, som är gemensamt med Bernard Coupet och Hervé Gaussier.

Sats: *En (pseudo-)biholomorf avbildning mellan två strikt pseudokonvexa släta områden i nästan komplexa mångfalder kan utvidgas till en diffeomorfi mellan områdenas slutna höljen.*

I fallet med komplexa mångfalder (då de nästan komplexa strukturerna är integrerbara) är detta en klassisk sats av Charles Fefferman från 1974. Det ursprungliga beviset av Fefferman bygger på asymptotik för Bergman-kärnan, och kan inte generaliseras till det nästan komplexa fallet. Den metod vi använder hämtar sin inspiration från arbeten dels av Louis Nirenberg, Sidney Webster och Paul Yang från 1980, dels av Sergey Pinchuk och Stanislav Khasanov från 1987. För att denna väg ska bli framkomlig måste vi dock först utveckla några allmänna analytiska verktyg på nästan komplexa mångfalder.

(1) *Uppskattningar av Kobayashi–Royden-metriken.* Vi bevisar en uppskattning av det asymptotiska uppförandet hos Kobayashi-metriken nära en strikt pseudokonvex hyperyta i en nästan komplex mångfald. Denna uppskattning påminner om Ian Grahams välkända resultat för fallet med kompexa mångfalder. Vårt bevis är emellertid helt annorlunda eftersom den traditionella jämförelsemetoden inte fungerar i det nästan komplexa fallet. Vi använder istället existensen av en plurikomplex funktion med logaritmiska poler på en nästan komplex mångfald, och icke-isotropa dilatationer av de lokala koordinaterna invid en randpunkt.

(2) *Existens och regularitet för Bishop-skivor.* Vårt andra redskap är analytiska skivor av Bishop-typ som är fästade vid en totalt reell mångfald längs den övre halvcirkeln. Vi bevisar existens och randregularitet för dessa skivor genom att lösa Bishops ekvation och tillämpa speglingsprincipen.

Vi vill påpeka att många öppna problem ännu kvarstår inom detta lovande forskningsområde. Det gäller sådana frågor som existens och geometriska egenskaper hos Bishopskivor (både lokala och globala), samt tillämpningar inom teorin för folieringar, kontaktgeometri och symplektisk geometri.

Litteraturhänvisning

Bernard Coupet, Hervé Gaussier & Alexandre Sukhov Fefferman's mapping theorem on almost complex manifolds in complex dimension two *Mathematische Zeitschrift* **250** (2005) 59–90

Jan Wiegerinck

Det pluripolära höljet till en graf

En mängd $E \subset \mathbf{C}^n$ kallas *pluripolär* om den är innehållen i $-\infty$-mängden till en plurisubharmonisk funktion definierad på en omgivning av E. Man kan fråga sig när en sådan mängd E är *fullständig*, alltså lika med $-\infty$-mängden till en plurisubharmonisk funktion. Grafen $\Gamma(f)$ till en holomorf funktion f på ett område D i $\mathbf{C}$ är ett typexempel på en pluripolär delmängd av $\mathbf{C}^2$. En sådan graf är fullständig i ett område $\Omega \subset \mathbf{C}^2$ om och endast om den sammanfaller med sitt pluripolära hölje $\Gamma(f)^*_\Omega$ i Ω, där det pluripolära höljet av en (pluripolär) mängd $E \subset \Omega$ definieras som

$$E^*_\Omega = \big\{z \in \Omega\,;\ h|_E = -\infty \ \text{ implicerar } \ h(z) = -\infty,\ h \in \mathrm{PSH}(\Omega)\big\}.$$

Betrakta nu D som en delmängd av ett större område $\tilde{D} \subset \mathbf{C}$. En förmodan formulerad 1992 av Norman Levenberg, Gaven Martin och Evgeny Poletsky säger att $\Gamma(f)$ ska vara fullständig i $\tilde{D} \times \mathbf{C}$ så snart f saknar analytisk fortsättning utanför D. I föredraget diskuterar jag ett gemensamt arbete med Armen Edigarian som visar att denna förmodan är falsk. Motexempel ges av Borel-serier på formen

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{z - a_j}$$

för lämpliga val av konstanterna $\{a_j\}$ och $\{c_j\}$, de senare mycket snabbt konvergerande mot noll.

I det fall då definitionsområdet D för funktionen f är komplementet till en sluten polär delmängd A i det större området $\tilde{D}$, det vill säga $D = \tilde{D} \setminus A$, kan vi ge en precis beskrivning av $\Gamma(f)^*_{\tilde{D}}$. Låt A' beteckna mängden av hopningspunkter till A i D.

Sats: *Låt f vara holomorf på D. Då är $\Gamma(f) \cup (A \times \mathbf{C})$ en fullständig pluripolär delmängd av $\tilde{D} \times \mathbf{C}$. Om f inte kan fortsättas holomorft över A, så är $\Gamma(f) \cup (A' \times \mathbf{C})$ en fullständig pluripolär delmängd av $\tilde{D} \times \mathbf{C}$.*

Sats: *Anta att f inte kan fortsättas över A och fixera en punkt $z_0 \in A$. Då gäller*

$$\Gamma(f)^*_{\tilde{D}\times\mathbf{C}} \cap (\{z_0\} \times \mathbf{C}) = \{z_0\} \times L_{z_0}(f; D)\,,$$

där $L_{z_0}(f; D)$ är mängden av inre värden för f i z_0.

Vi ger en definition av mängden $L_{z_0}(f; D)$ och visar att den antingen har ett enda element (omm $\mathbf{C} \setminus \{|f| < R\}$ är tunn i z_0 för $R > R_0$), eller att den är tom.

Litteraturhänvisning

ARMEN EDIGARIAN & JAN WIEGERINCK Determination of the pluripolar hull of graphs of certain holomorphic functions *Annales de l'Institut Fourier* **54** (2004) 2085–2104