NORDAN NIO

Humanistiska läroverket i Sigtuna, 22-24 april 2005

DEN nionde Nordan-konferensen hade underrubriken *Komplex analys, komplex geometri och komplex dynamik* och den ägde rum i Sveriges äldsta stad – Sigtuna. Deltagarna erbjöds kost och logi på ärevördiga Sigtunastiftelsen som ska vara en "humanismens tillflyktsort". Föredragen framfördes i det närbelägna Humanistiska läroverkets moderna föreläsningssal och som en inledning hölls ett välkomsttal av läroverkets rektor Rune Svaninger. På lördagen gavs möjlighet att bese Sigtuna till fots med kunnig guide från turistbyrån, en tur som avslutades på stadens renommerade choklad- och glasskonditori *R. C. Chocolat.*

DELTAGARE

Lev Aizenberg (Ramat Gan)
Dmitri Akhiezer (Moskva)
Mats Andersson (Göteborg)
Jockum Aniansson (Stockholm)
Kari Astala (Helsingfors)
Eric Bedford (Bloomington)
Slimane Benelkourchi (Toulouse)
Berit Bengtson (Umeå)
Lennart Berglind (Uppsala)
Robert Berman (Göteborg)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Jan Boman (Stockholm)
Bodil Branner (Köpenhamn)
Stefan Borell (Sundsvall)
Magnus Carlehed (Stockholm)
Urban Cegrell (Umeå)
Tien-Cuong Dinh (Paris)
Tomas Edlund (Uppsala)
Markku Ekonen (Helsingfors)
Bruno Fabre (Paris)
Lars Filipsson (Stockholm)
Franc Forstnerič (Ljubljana)
Salla Franzén (Uppsala)
Elin Götmark (Göteborg)
Lisa Hällstig (Umeå)
Marius Irgens (Trondheim)
David Jacquet (Stockholm)
Mattias Jonsson (Stockholm)
Andreas Juhl (Uppsala)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Christer Kiselman (Uppsala)
Maciej Klimek (Uppsala)
Frank Kutzschebauch (Sundsvall)
Andreas Lind (Sundsvall)
Niklas Lindholm (Lund)
Sam Lodin (Sundsvall)
Volodymyr Mazorchuk (Uppsala)
Lisa Nilsson (Stockholm)
Robert Nyqvist (Växjö)
Myriam Ounaïes (Strasbourg)
Mikael Passare (Stockholm)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Juhani Riihentaus (Joensuu)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Håkan Samuelsson (Göteborg)
Alexej Schuplev (Stockholm)
Ragnar Sigurdsson (Reykjavik)
Per-Anders Svensson (Växjö)
Anders Södergren (Uppsala)
Johan Thorbiörnson (Stockholm)
Alekos Vidras (Nicosia)
John Wermer (Providence)
Jonas Wiklund (Sundsvall)
Elizabeth Wulcan (Göteborg)
Nils Øvrelid (Oslo)

[55 personer]

PROGRAM

Fredag 22 april

15.05-15.50 John Wermer *The Cauchy–Green formula on the unit sphere in* $\mathbf{C}^2$, *and approximation*
16.20-17.05 Eric Bedford *Birational mappings, with connections to complex analysis and dynamics*
17.15-18.00 Franc Forstnerič *Deformations of Stein structures and holomorphic mappings*

Lördag 23 april

09.00-09.45 Bodil Branner *Topological properties of dynamically defined sets in dynamics of one variable*
09.55-10.40 Bo Berndtsson *Subharmonicity of Bergman kernels*
11.05-11.50 Tien-Cuong Dinh *Dynamics in several complex variables*
16.00-16.45 Kari Astala *Complex analysis, inverse problems, and quasiconformal mappings*
16.55-17.40 Robert Berman *Holomorphic Morse inequalities on manifolds with boundary*
17.50-18.35 Markku Ekonen *Mean-value inequalities and subharmonicity properties*

Söndag 24 april

09.00-09.40 Bruno Fabre *Locally residual currents and cohomology on algebraic varieties*
09.50-10.35 Dmitry Akhiezer *Spherical Stein spaces*
11.00-11.45 Mattias Jonsson *Behavior at infinity of polynomial maps of* $\mathbf{C}^2$

ARRANGÖRER

Salla Franzén och Burglind Juhl–Jöricke

FINANSIÄRER

Vetenskapsrådet
Axel Wenner–Grens stiftelse för internationellt forskarutbyte
Uppsala universitet

John Wermer

Cauchy–Greens formel på enhetssfären i $\mathbf{C}^2$, och approximation

Låt $D \subset \mathbf{C}$ vara ett område med slät rand, och låt $f \in C^1(\bar{D})$. Cauchy–Greens formel för området D tillåter oss, för varje $z \in D$, att skriva:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \frac{d\zeta}{\zeta - z} \,. \tag{1}$$

Observera att första termen i högerledet är en holomorf funktion F av z i området D. I själva verket har F en kontinuerlig fortsättning till $\bar{D}$ och definierar alltså ett element i algebran $A(D)$ av funktioner som är holomorfa i D och kontinuerliga på $\bar{D}$. Om $f \in A(D)$ reduceras naturligtvis formel (1) till Cauchys integralformel och $F = f$.

I fallet med enhetssfären S i $\mathbf{C}^2$ införde Gennadi Henkin i ett arbete från 1977 den speciella integralkärnan

$$H(\zeta, z) = \frac{\bar{\zeta}_1 \bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2 \bar{z}_1}{\left|1 - \langle z, \zeta \rangle\right|^2} \,, \qquad \zeta, z \in S \,,$$

med $\langle a, b \rangle = a\bar{b} + b\bar{a}$, som en ersättning för den klassiska Cauchy-kärnan. I analogi med formel (1) presenterar vi här följande integralframställning för funktioner av klass C^1 på sfären S: Låt Ω vara en (relativt) öppen delmängd av S och fixera en funktion $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$. Då gäller

$$\phi(z) = A(z) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \bar{\partial}\phi(\zeta) \, H(\zeta, z) \, d\sigma(\zeta) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \phi(\zeta) \, H(\zeta, z) \, \omega(\zeta) \,, \qquad z \in \Omega \,, \tag{2}$$

där A är en CR-funktion på Ω, medan σ betecknar det vanliga invarianta måttet på S och $\omega = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$.

Om nu $\phi \in C^1(S)$ och vi låter $\| \cdot \|$ beteckna den likformiga normen på S, så kan vi använda storheten $\operatorname{dist}(\phi, A(B)) = \inf\{\|\phi - g\| \,;\, g \in A(B)\}$ som ett mått på hur nära ϕ kan approximeras med polynom på S. Med hjälp av representationsformeln (2) bevisar vi att det existerar en konstant $C > 0$ sådan att man för alla $\phi \in C^1(S)$ har olikheten

$$\operatorname{dist}(\phi, A(B)) \leq C \, \|X\phi\| \,,$$

där X betecknar den tangentiella Cauchy–Riemann-operatorn $z_2 \partial / \partial \bar{z}_1 - z_1 \partial / \partial \bar{z}_2$.

Litteraturhänvisning

JOHN ANDERSON & JOHN WERMER A Cauchy–Green formula on the unit sphere in $\mathbf{C}^2$ *Contemporary Mathematics* **328** (2003) 21–30

Eric Bedford

Birationella avbildningar, med kopplingar till komplex analys och dynamik

En avbildning $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ sägs vara en rationell avbildning om de båda koordinatfunktionerna f_j är rationella. Graden $\deg(f)$ av en sådan avbildning kan till exempel definieras som den algebraiska graden av kurvan $f^{-1}(L)$ för en generisk linje L i bildrummet, och genom att sedan betrakta iterationer av f kan man införa den dynamiska graden

$$\delta(f) = \lim_{n\to\infty} \deg(f^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \deg(f \circ \cdots \circ f)^{1/n}.$$

En intressant familj av avbildningar fås från tvåstegsrekursioner av typen

$$x_{n+2} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_{n+1}}{\beta_0 + \beta_1 x_n + \beta_2 x_{n+1}},$$

med parametrar α_i, $\beta_i \in \mathbf{C}$. En sådan rekursionsformel leder naturligt till motsvarande birationella avbildning

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \left(y, \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}\right).$$

Vi betraktar problemet att bestämma villka dynamiska grader $\delta(f_{\alpha,\beta})$ som kan uppkomma för alla möjliga val av parametrarna $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ och $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$. Vi visar att för generiska val av α och β ges $\delta(f_{\alpha,\beta})$ av det gyllene snittet $\phi \approx 1.61$, och vi fastställer också alla andra möjliga värden på $\delta(\alpha, \beta)$.

Ett av skälen för att studera denna avbildning var att få svar på frågan för vilka α, β avbildningen f är periodisk. En ekvivalent fråga är: För vilka tvåstegsrekursioner som ovan leder varje val av startvärden (x_0, x_1) till en periodisk följd? Det visar sig att detta fenomen endast uppträder för vissa specifika parametrar α, β, och vi bevisar att de enda möjliga perioderna är 5,6,8,12,18 och 30.

Vår metod för att bestämma den dynamiska graden δ är följande. Först utvidgas $f_{\alpha,\beta}$ till det projektiva rummet $\mathbf{P}^2$ och sedan konstruerar vi en modifiering $\pi\colon X \to \mathbf{P}^2$ genom att blåsa upp vissa punkter. Motsvarande birationella avbildning $f_X : X \to X$ uppfyller nu regularitetskravet $(f^*)^n = (f^n)^*$ på kohomologigruppen $H^{1,1}(X)$ och den dynamiska graden δ ges av spektralradien för f_X^*.

Detta arbete är gjort i samarbete med Kyounghee Kim

Litteraturhänvisning

Eric Bedford & Kyounghee Kim Periodicities in linear fractional recurrences: degree growth of birational surface maps *Michigan Mathematical Journal* **54** (2006) 647–670

Franc Forstnerič

Deformationer av Stein-strukturer och holomorfa avbildningar

En komplex mångfald Y sägs ha den fundamentala *Oka-egenskapen* om varje kontinuerlig avbildning $f: X \to Y$ från en godtycklig Stein-mångfald X till Y är homotop med en holomorf avbildning. Detta är en ovanlig egenskap som dock gäller för vissa klasser av mångfalder Y, till exempel när Y är komplext homogen (ett resultat av Hans Grauert) eller när Y kan förses med en dominerande holomorf sprej (ett resultat av Mikhael Gromov). Vi har bevisat att mångfalder Y med Oka-egenskapen kan karakteriseras i termer av Runge-approximation för hela avbildningar $\mathbf{C}^N \to Y$.

Här presenterar vi en sats som säger att Oka-egenskapen alltid gäller om man tillåter homotopa deformationer av Stein-strukturen på källmångfalden X och (i fallet med komplex dimension två) ett byte av den underliggande C^∞-strukturen. Mer precist formulerar vi följande resultat.

Sats: *Låt X vara en Stein-mångfald med komplex struktur given av operatorn J och låt $f: X \to Y$ vara en kontinuerlig avbildning till en komplex mångfald Y.*

(i) *Om $\dim_{\mathbb{C}} X \neq 2$ existerar det en komplex Stein-struktur $\widetilde{J}$ på X som är homotop med den ursprungliga komplexa strukturen J och en $\widetilde{J}$-holomorf avbildning $\widetilde{f}: X \to Y$ som är homotop med f.*

(ii) *Om $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ existerar det en orienteringsbevarande homeomorfi $h: X \to X'$ på en Stein-yta X' och en holomorf avbildning $f': X' \to Y$ sådan att den sammansatta avbildningen $\widetilde{f} := f' \circ h: X \to Y$ är homotop med f.*

Stein-strukturen $\widetilde{J}$ i (i) och homeomorfin h i (ii) kan väljas att vara desamma för alla avbildningar f som tillhör en kompakt Haussdorff-familj av avbildningar $X \to Y$.

I ljuset av vissa resultat som visats av Yakov Eliashberg och Robert Gompf så kan vår sats utvidgas till fallet då (X, J) är en nästan komplex mångfald med en passande uppdelning i handtagskroppar, som endast innehåller handtag med index $\leq n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Vår artikel med Slapar innehåller även ett alternativt bevis för Eliashberg–Gompfs sats.

Litteraturhänvisningar

Franc Forstnerič Runge approximation on convex sets implies Oka's property
Annals of Mathematics **163** (2006) 689–707

Franc Forstnerič & Marko Slapar Stein structures and holomorphic mappings
Mathematische Zeitschrift **256** (2007) 615–646

Bodil Branner

Topologiska egenskaper hos dynamiskt definierade mängder i holomorf envariabeldynamik

I holomorf envariabeldynamik studeras iterationer av holomorfa avbildningar $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ och vi kommer här att begränsa oss till polynomavbildningar P av grad $d \geq 2$. När avbildningen utvidgas till Riemann-sfären har vi $P(\infty) = \infty = P^{-1}(\infty)$ och $P'(\infty) = 0$. För ett givet P delas planet upp i två mängder. Den *ifyllda Julia-mängden* K_P är den kompakta mängd som består av punkter z med begränsade banor, och dess komplement $A_P(\infty)$ kallas *attraktionsbassängen för* ∞. Den gemensamma randen till dessa två mängder är *Julia-mängden* J_P och det är på denna som dynamiken är kaotisk.

Följande resultat går tillbaka till nästan hundra år gamla arbeten av Pierre Fatou och Gaston Julia: Den ifyllda Julia-mängden K_P är sammanhängande om och endast om den innehåller alla kritiska punkter för P i $\mathbf{C}$. Om istället alla kritiska punkter för P i $\mathbf{C}$ ligger i $A_P(\infty)$ så är K_P en Cantor-mängd, alltså en totalt osammanhängande mängd. Ett annat resultat säger att $A_P(\infty)$ är sammanhängande, så Julia-mängden J_P är sammanhängande precis om den ifyllda mängden K_P är det.

Kvadratiska polynom har bara en kritisk punkt i $\mathbf{C}$, och om vi låter poynomen ha normalformen $P_c(z) = z^2 + c$ så är 0 den kritiska punkten. *Mandelbrot-mängden* M är den mängd i parameterplanet som utgörs av de punkter c för vilka J_{P_c} är sammanhängande. År 1980 bevisade Adrien Douady och John Hubbard att M är kompakt och sammanhängande. Randen till M är *bifurkationsmängden*, alltså mängden av de c-värden för vilka dynamiken genomgår en kvalitativ förändring. Den stora öppna frågan rörande Mandelbrot-mängden är huruvida den är lokalt sammanhängande.

För polynom av grad $d > 2$ ger inte de klassiska resultaten om sammanhang svar på frågan när Julia-mängden är en Cantor-mängd. De enklaste polynomen att ge sig i kast med är kubiska polynom med en kritisk punkt i K_P och en i $A_P(\infty)$. I mitt arbete med Hubbard utreddes fullständigt frågan när en kubisk Julia-mängd är en Cantor-mängd och vi utvecklade en teknik för att bevisa att en sammanhängande komponent består av en enda punkt. Denna teknik vidareutvecklades senare av Jean-Christophe Yoccoz.

Den analytiska delen av vår teknik bygger på följande två fakta: (1) Om U är en öppen begränsad mängd med en kompakt delmängd K, så består K av en enda punkt precis om ringområdet $A = U \setminus K$ har oändlig modul; (2) Om ringområdet $A = U \setminus K$ innehåller en oändlig inkapslande följd av öppna ringar A_n, disjunkt inbäddade i A och alla med samma homotopityp som A, så gäller Grötzsch' olikhet $\mathrm{mod} A \geq \sum_n (\mathrm{mod} A_n)$.

Den geometriska delen består i att definiera *pussel* i variabelplanet och *parapussel* i parameterplanet vilka ger upphov till de sökta ringområdena.

Litteraturhänvisningar

BODIL BRANNER & JOHN HUBBARD The iteration of cubic polynomials
Acta Mathematica **169** (1992) 229–325

BODIL BRANNER Puzzles and para-puzzles of quadratic and cubic polynomials
Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **49** (1994) 31–69

Bo Berndtsson

Subharmonicitet hos Bergman-kärnor

Låt D vara ett område i $\mathbf{C}^{1+n} = \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_z^n$ och låt ϕ vara en plurisubharmonisk funktion i D. För varje fixt t betraktar vi den n-dimensionella skivan $D_t = \{z\,;\ (t,z) \in D\}$ och betecknar med ϕ_t restriktionen av ϕ till skivan D_t. Vidare låter vi A_t^2 beteckna Bergman-rummet av holomorfa funktioner i D_t som är kvadratiskt integrerbara mot vikten $\exp(-\phi_t)$. Bergman-kärnan $K_t(\zeta, z)$ för A_t^2 med avseende på en punkt $z \in D_t$ är den unika holomorfa funktion av ζ som för alla funktioner $h \in A_t^2$ uppfyller

$$\int_{D_t} h(\zeta)\overline{K_t(\zeta, z)}\, e^{-\phi(t,\zeta)}\, dV(\zeta) = h(z)\,.$$

Det är ett väl känt faktum att Bergman-kärnan är plurisubharmonisk längs med skivan, alltså med avseende på z för fixt t. Satsen som jag diskuterar säger att logaritmen $\log K_t(z,z)$ av Bergman-kärnan även är subharmonisk med avseende på t, och i själva verket definierar en plurisubharmonisk funktion i hela D, under förutsättning att området D är pseudokonvext. För fallet $n = 1$ är detta en sats av Hiroshi Yamaguchi. Satsen gäller även för Bergman-kärnor för viktade rum, om vikten är plurisubharmonisk i D.

Denna sats kan ses som en komplex motsvarighet till Brunn-Minkowskis olikhet, som säger att $-\log$ av volymen av skivorna D_t är en konvex funktion om området $D \subset \mathbf{R}^{1+n}$ är konvext. Analogin ligger här i att $1/\mathrm{Vol}\,(D_t)$ kan ses som Bergman-kärnan för rummet av konstanta funktioner. Den viktade motsvarigheten är i det reella fallet en sats av András Prékopa.

I det komplexa fallet kan satsen generaliseras i många riktningar; den viktigaste är kanske en sats för komplexa mångfalder, där rummet av holomorfa funktioner motsvaras av sektioner till en holomorf linjebunt. Den mest allmänna varianten säger då att rummet av holomorfa sektioner på 'skivorna' definierar en vektorbunt som är positiv i Nakano-mening.

Litteraturhänvisningar

Bo Berndtsson Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains
Annales de l'Institut Fourier **56** (2006) 1633–1662

Bo Berndtsson Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations
Annals of Mathematics (2008) ?–?

Tien-Cuong Dinh

Dynamik i flera komplexa variabler

Låt X vara en komplex mångfald och $f: X \to X$ en meromorf avbildning. Ett centralt problem i flerdimensionell komplex dynamik är att skapa intressanta objekt som är invarianta under iterationer av f, det kan exempelvis vara invarianta mått och strömmar. De bör maximera entropin och beskriva distributionen av periodiska punkter eller banor för delvarieteter.

Under de senaste två decennierna har många olika specialfall studerats: till exempel polynomiella automorfier av $\mathbf{C}^2$ och holomorfa endomorfier av $\mathbf{P}^k$. Bland dem som lämnat väsentliga bidrag kan nämnas Eric Bedford och John Smillie, John Erik Fornæss och Nessim Sibony samt Jean-Yves Briend och Julien Duval. Vi kommer här att presentera ett nytt tillvägagångssätt, som vi infört i samarbete med Sibony. Det bygger i huvudsak på lösningar av $\partial\bar{\partial}$-ekvationen och egenskaper hos plurisubharmoniska funktioner.

Denna metod tillåter oss att konstruera dynamiska objekt för stora familjer av avbildningar, och de uppskattningar som fås från lösningarna till $\partial\bar{\partial}$-ekvationen gör det möjligt att kontrollera konvergensen mot de dynamiska objekten. Vi kommer att beskriva det (tekniskt sett) enkla fallet med så kallade polynomliknande avbildningar, det vill säga propra avbildningar mellan öppna mängder U och V i $\mathbf{C}^k$ där U är en relativt kompakt delmängd av V.

Våra metoder kan användas till att studera ekvidistributionen av holomorfa sektioner till positiva linjebuntar över projektiva mångfalder – ett problem som tidigare behandlats av Gang Tian, Bernard Shiffman och Steven Zelditch. Vi konstruerar också ekvilibriummått för slumpmässiga iterationer av korrespondenser. Speciellt, om $f: X \to X$ är en meromorf korrespondens av hög topologisk grad d och X en kompakt Kähler-mångfald med Kähler-form ω, så visar vi att $d^{-n}(f^n)^*\omega^k$ konvergerar mot ett mått μ som uppfyller $f^*\mu = d\,\mu$.

Litteraturhänvisningar

TIEN-CUONG DINH & NESSIM SIBONY Dynamique des applications d'allure polynomiale *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **82** (2003) 367–423

TIEN-CUONG DINH Decay of correlations for Hénon maps *Acta Mathematica* **195** (2005) 253–264

TIEN-CUONG DINH & NESSIM SIBONY Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications *Commentarii Mathematici Helvetici* **81** (2006) 221–258

Kari Astala

Komplex analys, inversa problem och kvasikonforma avbildningar

Vid studiet av inversa problem försöker man bestämma strukturen hos ett objekt utgående från indirekta observationer. En prototyp för ett inverst problem är den metod som går under namnet elektrisk impedanstomografi, där man ska bestämma konduktivitetsstrukturen hos en kropp med hjälp av elektriska mätningar på kroppens yta. Sådana frågeställningar har en lång rad tillämpningar, inom allt från industriella processer till medicinsk bildanalys.

Den elektriska impedanstomografins centrala fråga, som den formulerades av Alberto Calderón år 1980, kan uttryckas i precisa matematiska termer. Den undersökta kroppen får representeras av ett område $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ och man låter u vara den unika funktionen i Sobolev-rummet $H^1(\Omega)$ som löser ekvationen

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \text{ i } \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = \phi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \tag{1}$$

där σ är en reellvärd funktion som nästan överallt i Ω är uppåt och nedåt begränsad, $0 < c_1 \leq \sigma(x) \leq c_2 < \infty$. Denna konduktivitetsekvation beskriver uppförandet hos den elektriska potentialen i kroppen, medan mätdata på randen beskrivs av Dirichlet-till-Neumann-avbildningen

$$\Lambda_\sigma : \phi \mapsto \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Man frågar sig nu huruvida avbildningen Λ_σ bestämmer konduktiviteten, eller med andra ord: Följer det av $\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$ att $\sigma_1 = \sigma_2$ nästan överallt i Ω? Denna fråga brukar kallas för Calderóns problem.

I föredraget presenteras ett färskt gemensamt arbete med Lassi Päivärinta, där vi löser Calderóns problem i två dimensioner. Vår lösning bygger på användande av komplexanalytiska metoder för att handskas med de ingående elliptiska partiella differentialekvationerna. Speciellt viktiga för oss är vissa redskap från teorin för kvasikonforma avbildningar. Här representerar man (reellvärda) lösningar till (1) som realdelen av en funktion f som uppfyller

$$\bar{\partial} f = \mu \overline{\partial f}, \quad \mu = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}.$$

Antagandena om σ implicerar $\|\mu\|_{L^\infty} \leq k < 1$, så ovanstående Beltrami-system är likformigt elliptiskt. I korthet går vår bevisstrategi sedan ut på att överföra studiet av Dirichlet-till-Neumann-operatorn Λ_σ till en analys av vissa icke-linjära Fourier-transformer som i sin tur är bestämda av Λ_σ.

Litteraturhänvisning

KARI ASTALA & LASSI PÄIVÄRINTA Calderón's inverse conductivity problem in the plane *Annals of Mathematics* **163** (2006) 265–299

Robert Berman

Holomorfa Morse-olikheter på mångfalder med rand

För att skapa holomorfa objekt på en kompakt komplex mångfald X, till exempel meromorfa funktioner eller analytiska delvarieteter, letar man vanligen efter holomorfa sektioner till ett givet linjeknippe L över X. Standardexemplet är polynom av grad k som kan realiseras som sektioner till den tensorpotensen L^k av en naturlig linjebunt L över det komplexa projektiva rummet $\mathbf{P}^n$. Om krökningen hos en (hermitesk) linjebunt L är positiv och mångfalden X saknar rand leder Kunihiro Kodairas och Lars Hörmanders L^2-uppskattningar för $\bar{\partial}$-operatorn från femtio- och sextiotalen till existensen av "många" holomorfa sektioner till höga tensorpotenser L^k. Mer precist har man $h^0(L^k) \sim Ck^n$, där n är dimensionen för X. Dessa uppskattningar kan också formuleras som försvinnandesatser, nämligen att dimensionen $h^1(L^k)$ av den första Dolbeault-kohomologigruppen för L^k är lika med noll.

Jean-Pierre Demaillys holomorfa Morse-olikheter från 1985 ger mer allmänt kontroll över alla kohomologigruppers storlek i termer av L:s krökning:

$$h^q(L^k) \leq k^n \frac{(-1)^q}{(2\pi)^n} \int_{X(q)} \Theta^n/n! + o(k^n)\,.$$

Här antas X fortfarande sakna rand och $X(q)$ är mängden där krökningsformen Θ har index q, det vill säga där den har precis q negativa egenvärden. I detta föredrag betraktas fallet då X har en rand ∂X med (ej urartad) Levi-krökning $\mathcal{L}$. Det visas att Morse-olikheterna ovan fortfarande gäller om man lägger till följande randterm:

$$\frac{(-1)^q}{(2\pi)^n} \int_{\partial X} \int_{T(q)_x} (\Theta + t\mathcal{L})^{n-1} \wedge \partial\rho \wedge dt/(n-1)!$$

där ρ är den definierande funktionen för ∂X och $T(q)_x$ består av alla $t > 0$ sådana att $\operatorname{index}(\Theta + t\mathcal{L}) = q$. Det mest intressanta fallet är då L har positiv krökning, medan ∂X är negativt krökt (så X är pseudokonkav). Målet är då att konstruera många holomorfa sektioner till L^k, precis som i fallet då X saknar rand. För detta syfte gynnas man av den positiva krökningen från L, men frågan är om den kan "besegra" negativiten som kommer från krökningen av ∂X. En konsekvens av (en något skarpare variant av) Morse-olikheterna ovan är att svaret på frågan är "ja", så länge en viss krökningsintegral är positiv (då $n \geq 3$), exempelvis då $\Theta = -\mathcal{L}$ längs ∂X. Beviset av Morse-olikheterna baseras på punktvisa asymptotiska uppskattningar av Bergman-kärnorna för rummen av $\bar{\partial}$-harmoniska $(0,q)$-former med värden i L^k.

Litteraturhänvisning

ROBERT BERMAN Holomorphic Morse inequalities on manifolds with boundary *Annales de l'Institut Fourier* **55** (2005) 1055–1103

Markku Ekonen
Medelvärdesolikheter och subharmonicitetsegenskaper

De kontinuerliga subharmoniska funktionerna på ett område $D \subset \mathbf{R}^n$ kan karakteriseras som de kontinuerliga funktioner $u\colon D \to \mathbf{R}$ som uppfyller medelvärdesolikheten

$$\fint_B u\, dm_n \le \fint_{\partial B} u\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

för varje klot B som är relativt kompakt i D. Mer generellt kan man fråga sig vad för slags subharmonicitetsegenskaper en positiv kontinuerlig funktion $u\colon D \to \mathbf{R}$ har om den uppfyller

$$(*) \qquad \left(\fint_B u^p\, dm_n\right)^{1/p} \le \left(\fint_{\partial B} u^q\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/q}$$

för varje klot B som är relativt kompakt i D. Med andra ord, om dess genomsnittliga L^p-norm i varje klot $B \Subset D$ är begränsad av dess genomsnittliga L^q-norm över randen.

Föredraget kommer att kretsa kring detta problem, som formulerades av Tibor Radó år 1937. I fallet $n = 1$ känner man till det fullständiga svaret:

Sats 1: *Låt u vara en positiv kontinuerlig funktion på ett öppet intervall I. Då karakteriserar olikheten $(*)$ för varje relativt kompakt delintervall $B \subset I$ konvexitet hos funktionen u^α, $\alpha > 0$, om och endast om $q = (p + 2\alpha)/3$ och antingen $-2\alpha \le p \le -\alpha/2$ eller $p \ge \alpha$. Olikheten karakteriserar logaritmisk konvexitet hos u om $q = p/3$ och $p > 0$.*

I dimension två har man följande resultat:

Sats 2: *Låt u vara en positiv kontinuerlig funktion på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$. Då implicerar olikheten $(*)$ för varje relativt kompakt cirkelskiva $B \subset D$ subharmonicitet hos funktionen u om $q = (p+1)/2$ och $p > 0$. Olikheten karakteriserar logaritmisk subharmonicitet hos u om $q = p/2$ och $p > 0$.*

I högre dimensioner är betydligt mindre känt:

Sats 3: *Låt u vara en positiv och kontinuerlig funktion på ett område $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \ge 3$. Då implicerar olikheten $(*)$ för varje relativt kompakt klot $B \subset D$ subharmonicitet hos funktionen u om $q = (np + 2)/(n + 2)$ och $p > 0$. Olikheten implicerar subharmonicitet hos funktionen $u^{(n-2)/2}$ om $q = (np + n - 2)/(n + 2)$ och $p > 0$.*

Fallet $p = q + 1 = n$ är av särskilt intresse eftersom medelvärdesvillkoret $(*)$ då kan tolkas som en isoperimetrisk olikhet.

Litteraturhänvisning

Markku Ekonen Generalizations of the Beckenbach–Radó theorem
Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Dissertationes **128** (2002)

Bruno Fabre

Lokalt residuella strömmar och kohomologi på algebraiska varieteter

Detta föredrag handlar om lokalt residuella strömmar. Vår avsikt är att påvisa nyttan av dessa strömmar för att kunna formulera satser inom algebraisk geometri på ett enkelt och generellt sätt. Vi presenterar två satser vilka båda är variationer av Phillip Griffiths' "inversa residysats":

Låt X vara en algebraisk mångfald av dimension n och $Y_1, \dots, Y_n \subset X$ positiva hyperytor vars gemensamma snitt utgörs av ett ändligt antal punkter $P_1, \dots, P_s$. Låt $c_1, \dots, c_n$ vara komplexa tal sådana att $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. Då existerar det en meromorf n-form Ψ på X med $\mathrm{Res}_{P_j} \Psi = c_j$ för varje j.

En lokalt residuell ström, eller en Coleff–Hererra-ström, är en ström som lokalt kan skrivas som ett gränsvärde

$$\mathrm{Res}_{Y_1 \dots, Y_p}[\Psi](\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \Phi \wedge \phi\,,$$

där Ψ är en meromorf q-form och $f = (f_1, \dots, f_{p+1})$ är en holomorf avbildning sådan att $f_1, \dots, f_p$ lokalt definierar hyperytorna $Y_1, \dots, Y_p$ och $f^{-1}(0)$ innehåller polerna för Ψ. Integrationsmängden $\Gamma_{f,\varepsilon}$ ges av $|f_1| = \varepsilon_1, \dots, |f_p| = \varepsilon_p, |f_{p+1}| \geq \varepsilon_{p+1}$ och gränsövergången görs så att $\varepsilon_{j+1}/\varepsilon_j^k \to 0$ för varje $k \geq 1$.

Vår första sats kan ses som en kombination av ett resultat som bevisats av Miguel Herrera, Alicia Dickenstein och Carmen Sessa sammantaget med ett annat resultat av Boris Khesin, Alexei Rosly och Richard Thomas.

Sats 1: *På en algebraisk mångfald av dimension n kan kohomologin av kärven av q-holomorfa former beräknas ur ett komplex av lokalt residuella strömmar. Om $q = n$ så kan man inskränka sig till lokalt residuella strömmar med logaritmiska poler.*

Vår andra sats är en generaliserad version av Griffiths' sats, en så kallad invers Abel-sats, och kan formuleras på följande sätt:

Sats 2: *En lokalt residuell ström av bigrad (n,p) definierad i en omgivning av ett komplext p-plan i projektiva rummet, kan utvidgas till en global ström på hela det projektiva rummet om och endast om dess Abel–Radon-transform är noll.*

Denna sats har kopplingar till teorin för så kallade vävar via abelska relationer.

Litteraturhänvisningar

BRUNO FABRE Locally residual currents and Dolbeault cohomology on projective manifolds *Bulletin des Sciences Mathématiques* **130** (2006) 553–564

BRUNO FABRE Sur la transformation d'Abel–Radon des courants localement résiduels en codimension supérieure *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* **345** (2007) 81–85

Dmitri Akhiezer
Sfäriska Stein-rum

Låt X vara ett komplext rum och K en sammanhängande kompakt Lie-grupp som verkar på X genom holomorfa automorfier. Låt $\hat{K}$ vara den unitära dualen till K. För varje $\delta \in \hat{K}$ betecknar vi med $\mathcal{O}_\delta(X)$ den isotypiska komponenten av typ δ i Fréchet-modulen $\mathcal{O}(X)$. Från en sats av Harish-Chandra följer att varje $\mathcal{O}_\delta(X)$ är sluten och att summan av alla delrum $\mathcal{O}_\delta(X)$ är tät i $\mathcal{O}(X)$. Vi antar att X är sammanhängande och normalt.

Den komplexifierade gruppen $G = K^{\mathbb{C}}$ verkar i allmänhet inte på X, men dess Lie-algebra $\mathfrak{g}$ representeras av holomorfa vektorfält på X. En normal algebraisk G-varietet X sägs vara sfärisk om en Borel-delgrupp av G har en öppen bana på X. I enlighet med teorin för algebraiska transformationsgrupper kallar vi ett komplext rum X sfäriskt (med avseende på en given K-verkan) om tangentrummet i någon punkt på X genereras av vektorfält från en lösbar delalgebra av $\mathfrak{g}$.

Låt $\mathcal{D}(X)$ vara algebran av holomorfa differentialoperatorer på X och $\mathcal{D}(X)^K$ dess delalgebra av K-invarianta operatorer. Den sammanhängande delen av en topologisk grupp L betecknas L°.

Sats 1: *Ett Stein-rum X är sfäriskt om och endast om $\mathcal{O}(X)$ är en K-modul utan multipliciteter, det vill säga att alla K-delmoduler $\mathcal{O}_\delta(X)$ är irreducibla.*

Sats 1′: *Ett Stein-rum X är sfäriskt med avseende på K om och endast om det existerar en kompakt Lie-grupp L med $K = L^\circ$ och en L-verkan på X genom holomorfa automorfier, sådan att $\mathcal{O}(X)$ är en L-modul utan multipliciteter.*

Sats 2: *Ett Stein-rum X är sfäriskt om och endast om X är ett K-invariant Stein-område i en sfärisk affin G-varietet.*

Sats 3: *Om X är ett sfäriskt Stein-rum så är $\mathcal{D}(X)^K$ kommutativ. Omvänt, om X är en Stein-mångfald och $\mathcal{D}(X)^K$ är kommutativ så är X sfärisk.*

Sats 4: *För ett sfäriskt Stein-rum är algebran $\mathcal{D}(X)^K$ en polynomring med $r(X)$ generatorer.*

Exempel: Varje symmetriskt begränsat område D är ett sfäriskt Stein-rum med avseende på isotropigruppen $K \subset \mathrm{Aut}(D)^\circ$. Algebran $\mathcal{D}(D)^K$ är en polynomring med r generatorer, där r är rangen hos det symmetriska rummet D.

Litteraturhänvisning

Dmitri Akhiezer & Peter Heinzner Spherical Stein spaces
Manuscripta Mathematica **114** (2004) 327–334

Mattias Jonsson

Uppförande i oändligheten hos polynomavbildningar på $\mathbf{C}^2$

Polynomavbildningar av $\mathbf{C}^2$ kan i många fall uppvisa ett rikt och varierat dynamiskt beteende i oändligheten. I de flesta studier antar man att en avbildning beter sig på ett visst sätt, till exempel att avbildningen kan utvidgas till en rationell självavbildning med trevliga egenskaper på en särskild kompaktifiering av $\mathbf{C}^2$. Exempelvis baseras den dynamiska studien av polynomiella automorfier av $\mathbf{C}^2$ på Friedland–Milnor-klassificeringen (vilken i sin tur följer ur Jungs sats). Denna klassificering reducerar studiet till sammansättningar av Hénon-avbildningar. Utvidgningen av dessa avbildningar till det projektiva planet $\mathbf{P}^2 \supset \mathbf{C}^2$ beter sig på ett kontrollerat sätt: linjen $L_\infty = \mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{C}^2$ dras samman till en superattraherande fixpunkt $p \in L_\infty$.

För allmänna polynomavbildningar är det svårt att hitta en sådan "snäll" kompaktifiering. Jag kommer att rapportera om ett samarbete med Charles Favre där vi härlett några positiva resultat. Vi visar att det för varje dominant polynomavbildning F av $\mathbf{C}^2$ finns en kompaktifiering $S \supset \mathbf{C}^2$ sådan att den rationella utvidgningen av F till S beter sig på ett mycket välartat sätt i någon (fix) punkt $p \in S$. Mer precist är F holomorf i p, $F(p) = p$ och grodden $F\colon (S,p) \to (S,p)$ är *rigid*, det vill säga dess kritiska mängd är innehållen i en totalt invariant algebraisk mängd med normala korsningar.

Vid en första anblick verkar det svårt att konstruera den sökta kompaktifieringen S och punkten $p \in S$ genom att använda en enkel induktiv process likt den som används i beviset av inbäddade upplösningar av kurvsingulariteter. I stället konstruerar vi paret (S,p) genom att studera hur F verkar på ett lämpligt rum av valueringar (på polynomringen av $\mathbf{C}^2$) centrerade i oändligheten. Denna verkan har en attraherande fixpunkt, eller en egenvaluering. Punkten p är associerad till en väl vald attraktionsbassäng för egenvalueringen.

Som en biprodukt av våra undersökningar följer att den första dynamiska graden

$$d_\infty = \lim_{n\to\infty} (\deg F^n)^{1/n}$$

är ett kvadratiskt heltal, det vill säga $d_\infty^2 = A\, d_\infty + B$ för några heltal A och B. Vi bevisar också att F har en Green-funktion, mer precist, en icketrivial plurisubharmonisk funktion G med en logaritmisk pol i oändligheten, och sådan att $G \circ F = d_\infty G$.

Litteraturhänvisning

Charles Favre & Mattias Jonsson Eigenvaluations
Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **40** (2007) 309–349