NORDAN TIO

Åkroken i Sundsvall, 19-21 maj 2006

NORDANS tioårsjubileum firades med en konferens som anordnades gemensamt av Mittuniversitetet och Umeå universitet. Deltagarna bodde ståndsmässigt på anrika Hotel Knaust i centrala Sundsvall och det påstås att sent på kvällen sågs minst en av föredragshållarna rida uppför hotellets marmortrappa. De mycket trevliga föredragen hölls på Mittuniversitetets prisbelönta campus – Åkroken. Den traditionsenliga utflykten skedde med buss till Alnön och innehöll bland annat ett besök i en medeltida kyrka. För de modiga serverades surströmmingsklämmor vid småbåtshamnen på Alnöns södra sida, medan resten av deltagarna fick nöja sig med en mer neutralt doftande smörgås.

DELTAGARE

Örjan Bagge (Sundsvall)
Aboubakr Bayoumi (Kairo)
Slimane Benelkourchi (Stockholm)
Berit Bengtson (Umeå)
Lennart Berglind (Uppsala)
Zbigniew Błocki (Kraków)
Stefan Borell (Sundsvall)
Urban Cegrell (Umeå)
Fredrik Engström (Sundsvall)
Lars Filipsson (Stockholm)
Salla Franzén (Uppsala)
Anders Fällström (Umeå)
Lawrence Gruman (Toulouse)
Elin Götmark (Göteborg)
Lisa Hällstig (Umeå)
Marius Irgens (Trondheim)
Björn Ivarsson (Bern)
Burglind Juhl–Jöricke (Uppsala)
Christer Kiselman (Uppsala)
Sławomir Kołodziej (Kraków)
Frank Kutzschebauch (Bern/Sundsvall)
Andreas Lind (Sundsvall)
Sam Lodin (Sundsvall)
Erik Løw (Oslo)
Francine Meylan (Fribourg)
Lisa Nilsson (Stockholm)
Anthony O'Farrell (Maynooth)
Myriam Ounaïes (Strasbourg)
Mikael Passare (Stockholm)
Egmont Porten (Berlin)
Alexander Rashkovskii (Stavanger)
Maria Roginskaya (Göteborg)
Håkan Samuelsson (Wuppertal)
Alexej Schuplev (Stockholm)
Mei-Chi Shaw (South Bend)
Józef Siciak (Kraków)
Jari Taskinen (Helsingfors)
Frank Wikström (Sundsvall)
Erlend Fornæss Wold (Oslo)
Elizabeth Wulcan (Göteborg)
Yang Xing (Umeå)
Hiroshi Yamaguchi (Pohang)
Ahmed Zeriahi (Toulouse)
Per Åhag (Sundsvall)
Nils Øvrelid (Oslo)

[45 personer]

PROGRAM

Fredag 19 maj

15.15-16.00 Mikael Passare *Hypergeometric series and integrals*
16.15-17.00 Mei-Chi Shaw *Bounded plurisubharmonic functions and the $\bar{\partial}$-Cauchy problem in complex projective spaces*
17.15-18.00 Jari Taskinen *Bergman projections, L^∞-norms and pseudoconvex domains*

Lördag 20 maj

09.00-09.45 Hiroshi Yamaguchi *Jump theorem for harmonic functions and application*
10.00-10.45 Francine Meylan *Degree of a holomorphic map between unit balls from $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^n$*

11.15-12.00 Erlend Fornæss Wold *Proper holomorphic embeddings of Riemann surfaces into $\mathbf{C}^2$*

12.15-13.00 Ahmed Zeriahi *The complex Monge–Ampère operator on complex Kähler manifolds*

Söndag 21 maj

10.00-10.45 Sławomir Kołodziej *Hölder continuity of solutions to the complex Monge–Ampère equation with the right hand side in L^p*
11.15-12.00 Håkan Samuelsson *Various approaches to the residue of a complete intersection*

ARRANGÖRER

Urban Cegrell, Anders Fällström, Andreas Lind, Sam Lodin, Frank Wikström, Per Åhag

FINANSIÄRER

Vetenskapsrådet
Umeå universitet
Mittuniversitetet

Mikael Passare

Hypergeometriska serier och integraler

Låt $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ vara en ändlig delmängd av heltalsgittret $\mathbf{Z}^{n-1}$ och betrakta $(n \times N)$-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_N \end{pmatrix}.$$

Vi antar att A:s minorer är relativt prima så att kolonnvektorerna $(1, \alpha_1), \ldots, (1, \alpha_N)$ genererar $\mathbf{Z}^n$ såsom abelsk grupp. Låt även en uppsättning komplexa parametrar $\gamma_j \in \mathbf{C}$ vara givna för $j = 0, \ldots, n-1$. Följande system av differentialekvationer infördes av Israel Gelfand, Mikhail Kapranov och Andrei Zelevinsky i en serie banbrytande arbeten kring 1990, och dess lösningar ϕ brukar därför kallas GKZ-hypergeometriska funktioner:

$$\Big(\frac{\partial^{|\beta^+|}}{\partial a^{\beta^+}} - \frac{\partial^{|\beta^-|}}{\partial a^{\beta^-}}\Big)\phi(a) = 0\,, \quad \text{för alla } \beta = \beta^+ - \beta^- \in \mathbf{Z}^N \text{ med } \beta^+, \beta^- \in \mathbf{N}^N \text{ och } A\beta = 0\,;$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk}\, a_k \frac{\partial}{\partial a_k} - \gamma_j\Big)\phi(a) = 0\,, \text{för } j = 0, \ldots, n-1\,.$$

Här kan man tolka ekvationerna i sista raden som n olika homogenitetsvillkor på funktionen ϕ, så att ϕ väsentligen kan ses som en funktion av $N - n = m$ nya variabler $z_1, \ldots, z_m$.

För varje val av delmängd $I \subset \{1, \ldots, n\}$ med kardinalitet $|I| = n$ låter vi d_I beteckna absolutbeloppet av minoren det A_I, vilket sammanfaller med $(n-1)!$ gånger volymen av det simplex $\sigma_I \subset \mathbf{R}^{n-1}$ som har hörn i $\alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_n}$. Sedan skriver vi upp d_I stycken linjärt oberoende explicita lösningar $\phi_{I,\iota}$ till GKZ-systemet i form av Laurent–Puiseux-serier i variablerna $z_1, \ldots, z_m$ med koefficienter av typen $c_k = 1/\prod_j \Gamma(L_j(k))$, där L_j är affina former.

Det är välkänt att singularitetsmängden till de GKZ-hypergeometriska funktionerna utgörs av nollställeytan till en generaliserad diskriminant E_A och vi låter $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^m$ beteckna amöban till (dehomogeniseringen av) diskriminanten E_A. Man vet att de sammanhängande komponenterna $\{E_\nu\}$ av amöbakomplementet $\mathbf{R}^m \setminus \mathcal{A}$ står i kanonisk bijektion till trianguleringar av polytopen i $\mathbf{R}^{n-1}$ som ges av konvexa höljet av punkterna $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Vi har följande exakta beskrivning av konvergensområdet för de hypergeometriska serierna $\phi_{I,\iota}$.

Konvergensområdet D_I för serierna $\phi_{I,\iota}$ är ett fullständigt Reinhardt-område med egenskapen att dess konvexa bild Log$(D_I) \subset \mathbf{R}^m$ *innehåller alla komponenter E_ν som motsvarar trianguleringar där simplexet σ_I ingår, medan det är disjunkt från övriga E_ν.*

Vi har också analoga resultat för GKZ-funktioner representerade av Mellin–Barnes-integraler, där konvergensområdena istället beskrivs i termer av diskriminantens koamöba. Allt detta är resultat av gemensamt arbete med Lisa Nilsson och August Tsikh.

Litteraturhänvisning

Lisa Nilsson Amoebas, discriminants, and hypergeometric functions
Doktorsavhandling, Stockholms universitet, Stockholm (2009)

Mei-Chi Shaw

Begränsade plurisubharmoniska funktioner och $\bar{\partial}$-Cauchy-problemet i komplexa projektiva rum

I detta föredrag diskuterar vi begränsade plurisubharmoniska uttömningsfunktioner på pseudokonvexa områden i komplexa projektiva rum. Sådana funktioner används för att studera funktionsteorin för pseudokonvexa eller pseudokonkava områden via $\bar{\partial}$-Cauchy-problemet. Vi diskuterar även $\bar{\partial}$-slutna utvidgningsproblem för former definierade på randen av områden i komplexa hermiteska mångfalder. Det finns en väl utvecklad L^2-teori för detta problem på pseudokonvexa områden i $\mathbf{C}^n$, och mer generellt på områden i komplexa mångfalder med strikt plurisubharmoniska viktsfunktioner. Men sådana viktsfunktioner är inte alltid tillgängliga, exempelvis på pseudokonvexa områden i projektiva rummet $\mathbf{CP}^n$. I dessa fall spelar de begränsade plurisubharmoniska funktionerna en viktig roll.

Ett begränsat område $D \Subset \mathbf{R}^{2n}$ sägs som bekant vara Lipschitz om det för varje randpunkt $p \in b\Omega$ finns en omgivning U till p sådan att i lokala koordinater $(x', x_{2n}) = (x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})$ gäller

$$D \cap U = \{(x', x_{2n}) \in U\,;\; x_{2n} > \psi(x')\},$$

för någon Lipschitz-funktion $\psi\colon \mathbf{R}^{2n-1} \to \mathbf{R}$.

Definition: *En Lipschitz-hyperyta är en reell hyperyta som lokalt kan framställas som grafen till en Lipschitz-funktion. En Lipschitz-hyperyta sägs vara Levi-platt om den är lokalt folierad av komplexa mångfalder av komplex dimension $n-1$.*

Denna definition överensstämmer med den traditionella definitionen av Levi-platthet för hyperytor av klass C^2. Enligt ett resultat av David Barrett och John Erik Fornæss är folieringen av klass C^k om hyperytan är C^k, $k \geq 2$. Nyligen bevisade Jianguo Cao och jag följande resultat.

Sats: *Det existerar inga Levi-platta Lipschitz-hyperytor i $\mathbf{CP}^n$ för $n \geq 3$.*

Detta förbättrar tidigare resultat av Yum-Tong Siu om icke-existens av släta Levi-platta hyperytor i $\mathbf{CP}^n$ för $n \geq 3$ (eller närmare bestämt av ytor av klass C^k med $k = \frac{3n}{2} + 7$). Siu bevisade också icke-existensen av C^8 Levi-platta hyperytor i $\mathbf{CP}^2$. Huvudkomponenten i vårt bevis för satsen är ett studium av $\bar{\partial}$-Cauchy-problemet genom användning av en $\bar{\partial}$-Neumann-operator. När randen är C^2 och pseudokonvex i $\mathbf{CP}^n$ existerar $\bar{\partial}$-Neumann-operatorn enligt ett resultat av Takeo Ohsawa och Nessim Sibony. Det är inte känt om $\bar{\partial}$-Neumann-operatorn existerar för pseudokonvexa Lipschitz-områden. Men en viktad $\bar{\partial}$-Neumann-operator existerar alltid med lämplig viktsfunktion. För att visa icke-existensen av Levi-platta Lipschitz-hyperytor använder vi oss av lösningen till en viktad L^2-version av $\bar{\partial}$-Cauchy-problemet och det faktum att dessa viktade rum är ekvivalenta med vissa Sobolev-rum.

Litteraturhänvisning

JIANGUO CAO & MEI-CHI SHAW $\bar{\partial}$-Cauchy problem and nonexistence of Lipschitz Levi-flat hypersurfaces in $\mathbf{CP}^n$ with $n \geq 3$ *Mathematische Zeitschrift* **256** (2007) 175–192

Jari Taskinen

Bergman-projektioner, L^∞-normer och pseudokonvexa områden

Låt $\mathbf{D}$ beteckna enhetsskivan i komplexa planet $\mathbf{C}$. Det är ett välkänt faktum att den klassiska Bergman-projektionen $P\colon L^2(\mathbf{D}) \to H^2(\mathbf{D})$ inte är begränsad med avseende på den vanliga supremumnormen. Man kan nämligen utan någon svårighet hitta en funktion $f \in L^\infty(\mathbf{D})$ sådan att Pf har en logaritmisk singularitet på randen $\partial\mathbf{D}$.

I ett tidigare arbete har vi infört ett nytt lokalkonvext rum $L^\infty_V(\mathbf{D})$ som i en viss mening utgör den minsta möjliga utvidgningen av $L^\infty(\mathbf{D})$ sådan att Bergman-projektionen blir en kontinuerlig projektionsoperator från $L^\infty_V(\mathbf{D})$ på dess delrum $H^\infty_V(\mathbf{D})$ av analytiska funktioner.

Topologin på rummet $L^\infty_V(\mathbf{D})$ ges av en familj av viktade supremumnormer av formen

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbf{D}} v(z)\,|f(z)|\,,$$

där v är en positiv kontinuerlig viktsfunktion som är radiell, det vill säga $v(z) = v(|z|)$. Det korrekta valet av viktsfamilj V visar sig vara familjen av alla kontinuerliga radiella $v\colon \mathbf{D} \to \mathbf{R}_+$ som uppfyller

$$\sup_{z\in\mathbf{D}} v(z)\,\big|\log(1-|z|)\big|^n < \infty\,,$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

Tillsammans med Miroslav Engliš och Teemu Hänninen har vi nyligen uppnått analoga resultat i fallet med flera komplexa variabler. Närmare bestämt ersätter vi enhetsskivan $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ med ett begränsat strikt pseudokonvext område $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ med slät rand. Om vi antar att $\Omega = \{\, z \in \mathbf{C}^n;\ r(z) > 0\,\}$, där r är en slät definierande funktion, så inför vi en ny familj V av viktsfunktioner bestående av alla funktioner $w\colon \Omega \to \mathbf{R}_+$ av formen $w(z) = v(1 - r(z))$, för någon funktion v från den tidigare envariabelfamiljen. Det visar sig att denna nya familj inte beror på valet av definierande funktion r. Vi visar sedan att för varje $\alpha > -1$ är den viktade Bergman-projektionen P_α en kontinuerlig operator $L^\infty_V(\Omega) \to H^\infty_V(\Omega)$. Denna generalisering kräver nya uppskattningar av Forelli–Rudin-typ för Bergman-kärnan på Ω.

Litteraturhänvisningar

JARI TASKINEN On the continuity of the Bergman and Szegő projections *Houston Journal of Mathematics* **30** (2004) 171–190

MIROSLAV ENGLIŠ, TEEMU HÄNNINEN & JARI TASKINEN Minimal L^∞-type spaces on strictly pseudoconvex domains on which the Bergman projection is continuous *Houston Journal of Mathematics* **32** (2006) 253–275

Hiroshi Yamaguchi

En språngsats för harmoniska funktioner och tillämpningar

Låt $D \Subset \mathbf{R}^m$ vara begränsat av slutna ytor Σ av klass C^ω, och sätt $D^+ = D$, $D^- = \mathbf{R}^m \setminus \bar{D}$. Om U är en öppen omgivning till Σ så inför vi, för ett litet $\varepsilon > 0$, tubomgivningen

$$V = \{x \in U\,;\ -\varepsilon < R(x) < \varepsilon\} \subset U$$

där R är avståndsfunktionen med tecken. Låt $D_1 = D^+ \cup V$, $D_2 = D^- \cup V$. Språngsatsen för harmoniska funktioner säger att om h är en harmonisk funktion i V så finns en entydig funktion h_k i D_k, $k = 1, 2$, sådan att $h_2 - h_1 = h$ i V och $h_2(x)$ avtar som $1/||x||$ i oändligheten. I analogi med den sedvanliga konstruktionen av dessa funktioner h_k, kan vi visa följande resultat.

Sats: *Låt ω vara en harmonisk 1-form i V. Då finns det entydiga 1-former Ω_k i D_k sådana att $\Omega_2 - \Omega_1 = \omega$ i V och $\Omega_2(x)$ avtar som $1/||x||$ i oändligheten.*

Vi betraktar nu fallet $m = 3$. Låt $J\,dS_x = (f_1, f_2, f_3)$ vara en strömtäthet av klass C^ω på Σ som inducerar ett statiskt magnetfält B_J i $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma$. Sätt $B_J = B_J^\pm$ i $D^\pm$. Ett korollarium till satsen blir nu att vi kan hitta harmoniska 1-former $\mathcal{G}^\pm = (G_1^\pm, G_2^\pm, G_3^\pm) \bullet dx$ på $D^\pm \cup V$ så att $B_J^\pm$ kan skrivas som $(G_1^\pm, G_2^\pm, G_3^\pm)$.

För att presentera ett andra korollarium låter vi nu γ vara en sluten kurva i D och betraktar den linjära avbildningen $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$ på rummet $Z_1^\infty(\bar{D})$ av slutna 1-former ω på $\bar{D}$. Det är känt att det finns en entydig harmonisk 2-form σ_γ på $\bar{D}$ sådan att

$$\int_\gamma \omega = (\omega, *\sigma_\gamma)_D\,, \quad \forall\, \omega \in Z_1^\infty(\bar{D})\,.$$

Skriver vi $\sigma_\gamma = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$ så följer det nu att $J\,dS_x := (a, b, c)|_\Sigma dS_x$ är en strömtäthet som inducerar följande magnetfält:

$$B_J = \begin{cases} (a, b, c) & \text{på } D^+\,, \\ 0 & \text{på } D^-\,. \end{cases}$$

För det sista korollariet påminner vi om Osgoods sats (även känd som Hartogs lemma): "Varje funktion som är holomorf i en omgivning till randen ∂D av ett område $D \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, kan fortsättas holomorft till D."

Givet ett heltal k med $1 < k < m$, betrakta differentialoperatorerna

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \Delta'' = \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,.$$

En C^2-funktion u kallas nu *dubbelharmonisk* om $\Delta' u = \Delta'' u = 0$. Sachiko Hamano har med hjälp av språngsatsen visat att Osgoods sats gäller även för dubbelharmoniska funktioner.

Francine Meylan

Graden hos en holomorf avbildning mellan enhetsklot från $\mathbf{C}^2$ till $\mathbf{C}^n$

Som bekant genereras alla automorfier på enhetsklotet $B_n \subset \mathbf{C}^n$ av unitära Möbius-avbildningar tillsammans med funktioner av formen

$$\phi_a(z) = \frac{a - Pz - \sqrt{1-|a|^2}Qz}{1 - \langle z, a\rangle},$$

där $a \in B_n$, $Pz = \langle z, a\rangle a/|a|^2$ och $Qz = z - Pz$. På 1970-talet visade Herbert Alexander att varje proper holomorf avbildning från B_n till B_n, $n > 1$, är en automorfi och därför en kvot av två linjära funktioner.

Vi intresserar oss här för mängden av *rationella* propra funktioner från B_N till B_M och närmare bestämt för deras grad. Sidney Webster har visat att om $f\colon B_n \to B_{n+1}$, $n \geq 3$, är en rationell proper holomorf avbildning så är f en kvot av två linjära funktioner. James Faran visade att om $f\colon B_2 \to B_3$ är en rationell proper holomorf avbildning så är f ekvivalent med någon av följande fyra avbildningar:

$$\begin{aligned}
&(z,w) \mapsto (z^3, w^3, \sqrt{3}zw)\\
&(z,w) \mapsto (z, zw, w^2)\\
&(z,w) \mapsto (z^2, \sqrt{2}zw, w^2)\\
&(z,w) \mapsto (z, w, 0)
\end{aligned}$$

Han visade även att om $f\colon B_n \to B_N$, $N < 2n-1$, är en rationell proper holomorf avbilning så är f en kvot av två linjära funktioner. Dessutom visade Xiaojun Huang och Shanyu Ji att om $f\colon B_n \to B_{2n-1}$, $n \geq 3$, är en rationell proper holomorf avbildning så är f ekvivalent med någon av följande två avbildningar:

$$\begin{aligned}
L(z_1, ..., z_n) &= (z_1, ..., z_n, 0, ..., 0)\\
W(z_1, ..., z_n) &= (z_1, ..., z_{n-1}, z_n z_1, z_n z_2, ..., , z_n z_n)
\end{aligned}$$

Nyligen har Hidetaka Hamada gett en fullständig beskrivning av varje rationell proper holomorf avbildning från B_n till B_{2n}, $n \geq 4$. Anta nu att $f\colon B_N \to B_M$ är en rationell proper holomorf avbildning. Franc Forstnerič visade att om $N = 2$ så är f:s grad begränsad av $M^2(M-1)$. Följande resultat förfinar denna uppskattning.

Sats: *Låt $f\colon B_2 \to B_n$ vara en proper holomorf avbildning. Då gäller uppskattningen*

$$\deg f \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Litteraturhänvisning

FRANCINE MEYLAN Degree of a holomorphic map between unit balls from $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^n$ *Proceedings of the American Mathematical Society* **134** (2005) 1023–1030

Erlend Fornæss Wold

Propra holomorfa inbäddningar av Riemann-ytor i $\mathbf{C}^2$

Avsikten med föredraget är att diskutera följande sats.

Sats 1: *Låt* $\mathbf{T}$ *vara en komplex 1-dimensionell torus, och låt* $D \subset \mathbf{T}$ *vara ett område vars rand består av ett ändligt antal (topologiska) diskar med inre. Då tillåter* D *en proper holomorf inbäddning in i* $\mathbf{C}^n$.

Satsen är ett specialfall av det allmänna problemet om huruvida alla Riemann-ytor kan realiseras som slutna delmångfalder av $\mathbf{C}^2$; en naturlig fråga i ljuset av följande sats.

Sats 2: *Låt* X *vara en Stein-mångfald av dimension* $N \geq 2$. *Då inbäddas* X *propert och holomorft in i* $\mathbf{C}^{[\frac{3N}{2}]+1}$. *Resultatet är optimalt i meningen att det för varje* $N \geq 2$ *finns en Stein-mångfald av dimension* N *som inte kan realiseras som en sluten delmångfald av* $\mathbf{C}^M$ *för* $M < [\frac{3N}{2}] + 1$.

Det första positiva resultatet i det endimensionella fallet gavs av Kenkiti Kasahara och Toshio Nishino: *Enhetsskivan är en sluten delmångfald av* $\mathbf{C}^2$. Resultatet fås genom att man snittar en lämpligt vald komplex linje med ett Fatou–Bieberbach-område (som är Runge) och observerar att en sammanhängande komponent av snittet är enkelt sammanhängade. Henry Laufer och Herbert Alexander visade att även ringområden och punkterade skivor kan inbäddas propert och holomorft in i $\mathbf{C}^2$. Den första framgångsrika metoden för att allmänt angripa detta problem lanserades av Josip Globevnik och Berit Stensønes då de bevisade resultatet för ändligt sammanhängande plana områden utan isolerade punkter på randen. Beviset kan delas upp i två delar: (i) Man kan använda automorfier av $\mathbf{C}^2$ till att visa att *nästan* alla sådana områden inbäddas propert in i $\mathbf{C}^2$; (ii) Man kan använda ett kontinuitetsargument för att visa att man med metoden i (i) faktiskt får med sig alla områden.

Vi har använt en annan infallsvinkel på problemet genom att utnyttja Andersén–Lempert-teori för att trycka ut randen av Riemann-ytan mot oändligheten med hjälp av automorfier av $\mathbf{C}^2$. På detta vis kan man klara inbäddningen av enkelt sammanhängande plana områden utan att tillgripa steg (ii) ovan, och man kan även tillåta isolerade randpunkter. Denna teknik går också att använda på mer allmänna Riemann-ytor som redan är icke-propert inbäddade i $\mathbf{C}^2$. Från algebraisk geometri vet man att en yta D som den i Sats 1 kan realiseras i $\mathbf{C}^2$. När vi angriper D med automorfier för att konstruera en *proper* inbäddning får vi återigen att bara nästan alla sådana D är slutna delmångfalder av $\mathbf{C}^2$, men man kan på nytt använda ett kontinuitetsargument för att garantera det generella fallet.

Litteraturhänvisningar

Erlend Fornæss Wold Embedding subsets of tori properly into $\mathbf{C}^2$ *Annales de l'Institut Fourier* **57** (2007) 1537–1555

Erlend Fornæss Wold Proper holomorphic embeddings of finitely and some infinitely connected subsets of $\mathbf{C}$ into $\mathbf{C}^2$ *Mathematische Zeitschrift* **252** (2006) 1–9

Erlend Fornæss Wold Embedding Riemann surfaces properly into $\mathbf{C}^2$ *International Journal of Mathematics* **17** (2006) 963–974

Ahmed Zeriahi

Den komplexa Monge–Ampère-operatorn på komplexa Kähler-mångfalder

Föredraget redogör för ett gemensamt arbete med Philippe Eyssidieux och Vincent Guedj. Vi studerar degenererade komplexa Monge-Ampère-ekvationer på formen

$$(*) \qquad (\omega + dd^c\varphi)^n = \mu\,,$$

där ω är en stor semi-Kähler-form på en kompakt n-dimensionell Kähler-mångfald X som är normaliserad av villkoret $\mathrm{Vol}_\omega(X) := \int_X \omega^n = 1$. Ekvationen $(*)$ ska förstås i svag mening och den uppåt halvkontinuerliga funktionen $\varphi\colon X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ska ha egenskapen att $\omega + dd^c\varphi$ är en positiv $(1,1)$-ström på X. Sådana funktioner φ kallar vi ω-plurisubharmoniska funktioner på X.

När φ är begränsad på X är, enligt resultat av Eric Bedford och Alan Taylor, den yttre produkten $(\omega + dd^c\varphi)^n$ väldefinierad som ett ändligt Borel-mått på X, kallat Monge–Ampère-måttet av φ.

Vi utgår till att börja med från en idè av Urban Cegrell från det "lokala fallet" och introducerar en naturlig klass av ω-plurisubharmoniska funktioner på X med ändlig energi, betecknad $\mathcal{E}^1(X,\omega)$, och bevisar att Monge–Ampère-operatorn är väldefinierad på denna klass. Vi bevisar också att klassen besitter många intressanta egenskaper, exempelvis är jämförelseprincipen giltig liksom entydighetsegenskapen upp till additiv konstant.

För att komma vidare använder vi oss av Shing-Tung Yaus lösning av Calabi-förmodan med μ som är slät och strikt positiv, och får genom approximation ett generellt resultat i Kähler-fallet, vilket ger en karakterisering i termer kapaciteter av de mått för vilka Monge-Ampère-ekvationen $(*)$ har en entydig lösning i klassen $\mathcal{E}^1(X,\omega)$.

Till sist nämner vi några tillämpningar som utvecklats i samarbete med Eyssidieux och Guedj. Anta nämligen att $\mu = f\,\omega^n$ är ett positivt mått med densitet $f \in L^p(X,\omega^n)$, $p > 1$. I detta fall kan vi använda en idé som härrör från Sławomir Kołodziej och visa att den entydiga lösningen är kontinuerlig.

Dessutom visar vi hur entydighets- och konvexitetsegenskaperna hos klassen $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ tillåter oss att lösa mer allmänna Monge-Ampère-ekvationer

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = e^{t\varphi}\mu\,,$$

där $t > 0$, genom att använda Schauders fixpunktsats. Sedan tillämpar vi dessa resultat för konstruktion av singulära Kähler–Einstein-metriker med icke-positiv krökning på projektiva Kawamata-logterminala (klt) par, speciellt på kanoniska modeller av algebraiska varieteter av allmän typ.

Litteraturhänvisning

PHILIPPE EYSSIDIEUX, VINCENT GUEDJ & AHMED ZERIAHI Singular Kähler-Einstein metrics *Journal of the American Mathematical Society* (2009)

Sławomir Kołodziej

Hölder-kontinuitet hos lösningar till den komplexa Monge–Ampère-ekvationen med högerled i L^p

Dirichlets problem för den komplexa Monge–Ampère-ekvationen i en strikt pseudokonvex delmängd till $\mathbf{C}^n$ löstes 1976 av Eric Bedford och Alan Taylor. Därefter har lösningarnas existens och regularitet, givet olika villkor på högerledet, studerats intensivt. Följande två resultat är gemensamma arbeten med Vincent Guedj och Ahmed Zeriahi. Vi låter u beteckna lösningen till Dirichlet-problemet med randvärden ϕ och högerled i L^p, $p > 1$.

Sats 1: *Låt $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ vara ett strikt pseudokonvext område och ϕ en Hölder-kontinuerlig funktion på $\partial\Omega$ med Hölder-exponent lika med 2α. Om Perron–Bremermann-enveloppen till ϕ hör till $L^p(\Omega)$ så är u Hölder-kontinuerlig på $\bar{\Omega}$ med Hölder-exponent lika med α_1 för varje $\alpha_1 < \min(\alpha, 2/(qn+2))$, där $1/p + 1/q = 1$.*

Sats 2: *Om vi ändrar antagandet om Perron–Bremermann-enveloppen i föregående sats till att istället dess Laplacian ska vara integrerbar i Ω, så är u Hölder-kontinuerlig på $\bar{\Omega}$ med Hölder-exponent lika med α_1 så snart $\alpha_1 < \min(\alpha, 2/(qn+1))$, där $1/p + 1/q = 1$.*

I andra delen av föredraget studerar vi motsvarande problem på kompakta Kähler-mångfalder M av komplex dimension n. Om M har fundamentalform ω säger vi att en kontinuerlig funktion u på M är *ω-plurisubharmonisk* om $dd^c u + \omega \geq 0$. Vi vill nu hitta ω-plurisubharmoniska lösningar till den komplexa Monge–Ampère-ekvationen

$$(w + dd^c u)^n = f\,\omega^n\,,$$

där f uppfyller $f \in L^1(M)$ och $f \geq 0$, samt normaliseringsvillkoret $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$. För släta positiva f löstes ekvationen av Shing-Tung Yau. Det har senare visat sig finnas kontinuerliga lösningar för $f \in L^p(M)$, $p > 1$.

Sats 3: *För $p > 1$ och $f \in L^p(M)$ som uppfyller normaliseringsvillkoret i ekvationen ovan, är lösningen u till ekvationen Hölder-kontinuerlig med Hölder-exponent som beror på p, M och $\|f\|_p$.*

Sedan Gang Tian, Zhou Zhang med flera nyligen började studera Kähler–Ricci-flöden på projektiva mångfalder har detta sista resultat, som kan generaliseras till orbifalder, blivit särskilt relevant.

Litteraturhänvisning

SŁAWOMIR KOŁODZIEJ The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory *Memoirs of the American Mathematical Society* **840** (2005) x+64 s.

Håkan Samuelsson

Olika angreppssätt på residyn för ett fullständigt snitt

Låt X vara en n-dimensionell komplex mångfald och $f\colon X \to \mathbf{C}^{p+1}$ en holomorf avbildning som vi antar definierar ett fullständigt snitt, det vill säga att $\operatorname{codim} f^{-1}(0) = p$. Vi definierar residyintegralen

$$I_f^\varphi(\epsilon) = \int_{\cap\{|f_j|=\epsilon_j\}} \varphi/(f_1 \cdots f_p),$$

där $\varphi \in \mathcal{D}_{n,n-p}(X)$. Nicolás Coleff och Miguel Herrera visade 1978, med hjälp av Hironakas sats, att om $\epsilon \to 0$ på så sätt att $\epsilon_j/\epsilon_{j-1}^k \to 0$ för alla $k \in \mathbf{N}$ och $j = 2, \ldots, p$, så existerar gränsvärdet av $I_f^\varphi(\epsilon)$ och definierar en ström som vi betecknar med R^f eller $\bar\partial(1/f_1) \wedge \cdots \wedge \bar\partial(1/f_p)$. Oberoende av varandra visade dels Mikael Passare dels Alicia Dickenstein och Carmen Sessa omkring 1985 att idealet genererat av f sammanfaller med annihilatoridealtet av R^f vilket indikerar att R^f är den "rätta" residyströmmen av f. Men definitionen av R^f är besvärlig eftersom den kräver speciella gränsvärden. År 1996 visade Passare tillsammans med August Tsikh att om $f = (z^4, z^2 + w^2 + z^3)$ så har $I_f^\varphi(\epsilon)$ *inte* ett obetingat gränsvärde. Jan-Erik Björk konstruerade senare generiska familjer av exempel med denna besvärande egenskap, inklusive exempel där $I_f^\varphi(\epsilon) \to \infty$ längs vissa banor.

För att förhoppningsvis återfå stabilitet i definitionen av R^f har olika medelvärdesbildningar av $I_f^\varphi(\epsilon)$ föreslagits, och i föredraget diskuterar jag två sådana. Betrakta

$$\mathcal{I}_f^\varphi(\epsilon) = \int \frac{\bar\partial\chi_1^\epsilon \wedge \cdots \wedge \bar\partial\chi_p^\epsilon}{f_1 \cdots f_p} \wedge \varphi, \quad \Gamma_f^\varphi(\lambda) = \int \frac{\bar\partial|f_1|^{2\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \bar\partial|f_p|^{2\lambda_p}}{f_1 \cdots f_p} \wedge \varphi,$$

där $\operatorname{Re}\lambda_j \gg 1$ och $\chi_j^\epsilon = \chi_j(|f_j|/\epsilon_j)$, med χ_j som är släta approximationer av den karaktäristiska funktionen för $[0, \infty)$. Passare visade att om $\epsilon \to 0$ längs hyperboliska banor så existerar $\lim \mathcal{I}_f^\varphi(\epsilon)$ och ger R^f. Från arbeten av Alain Yger vet vi också att om λ restringeras till en komplex linje genom origo så har $\Gamma_f^\varphi(\lambda)$ en meromorf fortsättning och värdet i origo ger R^f, och dessutom, om $p = 2$ är $\Gamma_f^\varphi(\lambda)$ i själva verket meromorf av två variabler och analytisk i en omgivning av $\{\operatorname{Re}\lambda_1 \geq 0\} \cap \{\operatorname{Re}\lambda_2 \geq 0\}$.

Jag presenterar några generaliseringar av dessa resultat och diskuterar de väsentliga stegen i bevisen. Närmare bestämt ska vi se att om $p \leq 3$ så är $\mathcal{I}_f^\varphi(\epsilon)$ Hölder-kontinuerlig som funktion av $\epsilon \in [0, \infty)^3$ och $\Gamma_f^\varphi(\lambda)$ är analytisk i en omgivning av $\cap_{j=1}^3 \{\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0\}$. Dessa resultat har vi senare lyckats visa även för godtyckliga värden på p.

Litteraturhänvisning

Håkan Samuelsson Analytic continuation of residue currents

Arkiv för matematik **47** (2009) 127–141