NORDAN TOLV

Högskolan Norra i Mariehamn, 18-20 april 2008

NÄR Nordan drog österut samlades vi på Åland, det självstyrda svenskspråkiga landskapet i Finland. Det pågick denna vår ett program i komplex analys på Institut Mittag–Leffler och därför hade många av deltagarna rest i abonnerad buss från Djursholm till färjan i Kappelskär. Konferensens elva föreläsningar skedde i den lokala högskolans moderna auditorium på bekvämt gångavstånd från Hotell Arkipelag där samtliga var inkvarterade. På lördagen gjordes en utflykt till Föglö där deltagarna hade tid med en promenad i solskenet innan de lät sig väl smaka av den delikata skärgårdsbuffén på restaurang *Seagram* i Degerby.

DELTAGARE

Mats Andersson (Göteborg)
Eric Bedford (Bloomington)
Bo Berndtsson (Göteborg)
Léa Blanc–Centi (Lyon)
Stefan Borell (Oslo)
Gregery Buzzard (West Lafayette)
Urban Cegrell (Umeå)
Markku Ekonen (Helsingfors)
Salla Franzén (Stockholm)
Anders Fällström (Umeå)
Elin Götmark (Göteborg)
Lisa Hed (Umeå)
Marius Irgens (Trondheim)
Amadeo Irigoyen (Pisa)
Björn Ivarsson (Bern)
Petter Johansson (Stockholm)
Berit Kemppe (Umeå)
Dano Kim (Chicago)
Mika Koskenoja (Helsingfors)
Nikolay Kruzhilin (Moskva)
Frank Kutzschebauch (Bern)
Aron Lagerberg (Göteborg)
László Lempert (West Lafayette)
Andreas Lind (Sundsvall)
Sam Lodin (Sundsvall)
Johannes Lundqvist (Stockholm)
Erik Løw (Oslo)
Benedikt Magnússon (Reykjavik)
Per Manne (Bergen)
Joël Merker (Paris)
Christophe Mourougane (Rennes)
Lisa Nilsson (Stockholm)
David Witt Nyström (Göteborg)
Myriam Ounaïes (Strasbourg)
Mikael Passare (Stockholm)
Mihai Păun (Nancy)
Egmont Porten (Sundsvall)
Juhani Riihentaus (Joensuu)
Håkan Samuelsson (Göteborg)
Mei-Chi Shaw (Notre Dame)
Alexey Shchuplev (Krasnojarsk)
Nessim Sibony (Orsay)
Ragnar Sigurdsson (Reykjavik)
Yum-Tong Siu (Cambridge)
Alan Sola (Stockholm)
Berit Stensønes (Ann Arbor)
Jacob Sznajdman (Göteborg)
August Tsikh (Krasnojarsk)
Tetsuo Ueda (Kyoto)
Frank Wikström (Sundsvall)
Elizabeth Wulcan (Göteborg)
Ahmed Zeriahi (Toulouse)
Sergei Znamenskii (Pereslavl-Zalesskij)
Nils Øvrelid (Oslo)

[54 personer]

PROGRAM

Fredag 18 april

14.00-14.45 Nessim Sibony *Exponential estimates for plurisubharmonic functions and applications to dynamics*
15.00-15.45 Elizabeth Wulcan *Pseudomeromorphic currents*
16.15-17.00 Gregery Buzzard *Structural stability of hyperbolic Hénon maps*
17.15-18.00 Léa Blanc–Centi *On the Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex regions in the almost complex case*

Lördag 19 april

09.00-09.45 László Lempert *Analytic sheaves in Banach spaces*
10.00-10.45 Alexey Shchuplev *Residual kernels with singularities on coordinate planes*
11.15-12.00 Berit Stensønes *The envelope of holomorphy of two-spheres*
12.15-13.00 Nikolay Kruzhilin *Proper actions of Lie groups on complex manifolds*

Söndag 20 april

09.00-09.45 Mihai Păun *On the invariance of plurigenera*
10.00-10.45 Elin Götmark *Explicit representation of membership of polynomial ideals*
11.15-12.00 Yum-Tong Siu *Multiplier ideal sheaves of partial differential equations*

ARRANGÖRER

Lars Filipsson, Lisa Nilsson och Mikael Passare

FINANSIÄRER

Vetenskapsrådet
Axel Wenner–Grens stiftelse för internationellt forskarutbyte
Letterstedtska föreningen
Stockholms universitet
Kungliga tekniska högskolan

Nessim Sibony

Exponentiella uppskattningar för plurisubharmoniska funktioner och tillämpningar inom dynamik

Låt X vara en komplex mångfald av dimension k och μ ett positivt mått på X givet av en differentialform med koefficienter i L^p_{loc}, med $p > 1$. Om nu ψ är en plurisubharmonisk funktion på X och $K \subset X$ en kompakt delmängd, så är $e^{-\alpha\psi}$ integrerbar över K med avseende på μ för varje tillräckligt litet $\alpha > 0$. Specialfallet då X är en öppen mängd i $\mathbf{C}^k$ och μ är Lebesgue-måttet är ett klassiskt resultat som går tillbaka till Lars Hörmander och Henri Skoda, och det generella fallet är en direkt konsekvens. Dessa exponentiella uppskattningar har visat sig vara väldigt användbara såväl inom komplex geometri som inom Kähler–Einstein-geometri.

Vi visar liknande exponentiella uppskattningar för plurisubharmoniska funktioner med avseende på Monge–Ampère-mått med Hölder-kontinuerlig potential. Måttet μ sägs vara *lokalt moderat* om det för varje kompakt $K \subset X$ och varje kompakt familj $\mathcal{F}$ av plurisubharmoniska funktioner på en omgivning av K finns konstanter $\alpha > 0$ och $c > 0$ sådana att

$$\int_K e^{-\alpha\psi} d\mu \leq c \quad \text{för varje} \quad \psi \in \mathcal{F}.$$

En positiv sluten (p,p)-ström S sägs vara lokalt moderat om dess spårmått $S \wedge \omega^{k-p}$ är det. Varje positiv sluten $(1,1)$-ström R kan lokalt skrivas $dd^c u$, där u är en plurisubharmonisk funktion som då sägs vara en potential för R.

Vårt huvudresultat är att om S är en lokalt moderat (p,p)-ström på X, och u en Hölder-kontinuerlig funktion på $\operatorname{supp}(S)$ sådan att strömmen $dd^c(uS)$ är positiv, då är $dd^c(uS)$ också lokalt moderat. Om speciellt R är en positiv sluten $(1,1)$-ström med Hölder-kontinuerliga lokala potentialer så är alltså produktströmmen $R \wedge S$ lokalt moderat. Det följer också att om u är en Hölder-kontinuerlig plurisubharmonisk funktion på X så är Monge–Ampère-strömmarna $(dd^c u)^p$ lokalt moderata.

Som tillämpning erhåller vi flera stokastiska egenskaper för jämviktsmått som hör ihop med holomorfa avbildningar på projektiva rum. Exempelvis visar vi att om f är en icke-inverterbar holomorf endomorfi på $\mathbf{P}^k$ så är de associerade Green-strömmarna $T_f \wedge \ldots \wedge T_f = T_f^p$ lokalt moderata. Vi får också en central gränsvärdessats med avseende på Green-måttet T_f^k för dhs-observabler, det vill säga sådana funktioner som (utanför en pluripolär mängd) kan skrivas som differensen av två plurisubharmoniska funktioner plus en slät funktion. Det är noterbart att våra resultat tycks vara nya till och med i det endimensionella fallet. Dessa typer av exponentiella uppskattningar borde komma att spela en roll i studiet av stokastiska egenskaper hos komplexa dynamiska system.

Litteraturhänvisning

TIEN-CUONG DINH, VIÊT-ANH NGUYÊN & NESSIM SIBONY Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics
Journal of Differential Geometry **84** (2010) 465–488

Elizabeth Wulcan

Pseudomeromorfa strömmar

I föredraget presenteras ett gemensamt arbete med Mats Andersson. Vi inför en klass av strömmar som vi kallar *pseudomeromorfa* och som omfattar tidigare studerade meromorfa strömmar såsom principalvärdesströmmar och residyströmmar. Vårt grundläggande motiv för att betrakta denna utvidgade klass är att den tillåter en kalkyl som ger oss en naturlig geometrisk uppdelning av residyströmmar.

Låt f vara en holomorf funktion på en komplex mångfald och låt $V(f)$ beteckna dess nollställemängd. Ett fundamentalt exempel på en pseudomeromorf ström är Lelong-strömmen $\mu = dd^c \log|f|$. Enligt Poincaré–Lelongs sats gäller att $\mu = \sum \alpha_j[Z_j]$, där summan tas över de irreducibla komponenterna av $V(f)$. Här betecknar $[Z_j]$ integrationsströmmen längs Z_j och α_j är motsvarande Hilbert–Samuel-multiplicitet.

På liknande sätt som Lelong-strömmen μ kan ses som en strömrepresentation av varieteten $V(f)$, räknad med multipliciteter, så kan residyströmmarna ses som strömrepresentationer av ideal. Residyströmmen som hör till ett principalideal (f) definieras som $\bar{\partial}[1/f]$, där $[1/f]$ är en principalvärdesström. Strömmen $\bar{\partial}[1/f]$ har sitt stöd på $V(f)$ och mängden $\operatorname{ann}\bar{\partial}[1/f]$ av holomorfa funktioner som annihilerar den är precis idealet (f). Givet ett godtyckligt ideal J och en fri upplösning av J kan man konstruera en vektorvärd residyström R, som representerar J på ett analogt sätt. Den har sitt stöd på varieteten för idealet J och $\operatorname{ann} R = J$.

Huvudresultatet som gås igenom under föredraget handlar om hur en sådan residyström R på ett naturligt sätt kan uppdelas med avseende på mängden $\operatorname{Ass}(J)$ av så kallade associerade primideal till J, vilket generaliserar uppdelningen av Lelong-strömmen μ med avseende på komponenterna Z_j. En mer precis formulering är att R kan skrivas som en summa av enklare strömmar $R^{\mathfrak{p}}$, där $\mathfrak{p}$ genomlöper $\operatorname{Ass}(J)$, så att varje $R^{\mathfrak{p}}$ har stöd på motsvarande varietet $V(\mathfrak{p})$ och dess annihilator är ett enklare så kallat primärideal. Faktum är att framställningen

$$\operatorname{ann} R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(J)} \operatorname{ann} R^{\mathfrak{p}}$$

utgör en primäruppdelning av idealet J.

Litteraturhänvisning

Mats Andersson & Elizabeth Wulcan Decomposition of residue currents
Journal für die reine und angewandte Mathematik **638** (2010) 103–118

Gregery Buzzard

Strukturell stabilitet hos hyperboliska Hénon-avbildningar

Vi visar stabilitetsresultat för holomorfa familjer $\{f_\lambda\}$ av hyperboliska polynomautomorfier på $\mathbf{C}^2$ av fix grad. För detta utnyttjar vi Clark Robinsons metod med stabila/instabila skivor i kombination med tekniker från teorin om holomorfa rörelser i två dimensioner. Vi börjar med att arbeta i en omgivning av Julia-mängden $J = J_0$.

Sats 1: *Om familjen $\{f_\lambda\}$ beror holomorft på parametern $\lambda \in \Delta \subset \mathbf{C}$ så finns en omgivning U till Julia-mängden J, en konstant $\rho > 0$ och homeomorfier Φ_λ, definierade på U för alla $|\lambda| < \rho$, sådana att:*

$$\Phi_\lambda(z) \text{ är holomorf med avseende på } \lambda \text{ för fixt } z,\ \Phi_0 = \mathrm{Id} \text{ och } \Phi_\lambda f_0 = f_\lambda \Phi_\lambda.$$

I beviset använder vi idéer som liknar dem som Robinson införde. Observera att satsen också medför att familjen av Julia-mängder J_λ rör sig holomorft, vilket först visades av Mattias Jonsson med hjälp av andra metoder.

I nästa steg betraktar vi unionen $J^+ \cup J^-$, där J^+ (respektive J^-) är randen av de punkter som har begränsade framåtriktade (respektive bakåtriktade) banor under automorfin f_0. Notera att $J = J^+ \cap J^-$. Vi utvidgar de konjugerande avbildningarna Φ_λ från den föregående satsen till en omgivning av denna större mängd $J^+ \cup J^-$.

Sats 2: *Om familjen $\{f_\lambda\}$ beror holomorft på parametern $\lambda \in \Delta \subset \mathbf{C}$ så finns en omgivning M till $J^+ \cup J^-$, en konstant $\rho > 0$ och homeomorfier Φ_λ, definierade på M för alla $|\lambda| < \rho$, sådana att:*

$$\Phi_\lambda(z) \text{ är holomorf med avseende på } \lambda \text{ för fixt } z,\ \Phi_0 = \mathrm{Id} \text{ och } \Phi_\lambda f_0 = f_\lambda \Phi_\lambda.$$

Dessutom är Φ_λ av klass C^∞ på varje öppen mängd som inte skär $J^+ \cup J^-$.

För att slutligen erhålla en global strukturell stabilitetssats fortsätter vi att utvidga de konjugerande avbildningarna Φ_λ, nu till hela $\mathbf{C}^2$. Men eftersom detta rum inte är kompakt kan vi inte längre omedelbart tillämpa Robinsons tekniker. Vi kombinerar dem med idéer från ett arbete av mig själv och Kaushal Verma för att få den globala konjugeringen.

Sats 3: *Låt homeomorfierna Φ_λ på M vara som i föregående sats. Då finns en utvidgning (även den kallad) $\Phi_\lambda\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ som är en homeomorfi för varje fixt λ, sådan att:*

$$\Phi_\lambda(z) \text{ är holomorf med avseende på } \lambda \text{ för fixt } z,\ \Phi_0 = \mathrm{Id} \text{ och } \Phi_\lambda f_0 = f_\lambda \Phi_\lambda.$$

Litteraturhänvisning

Gregery Buzzard & Adrian Jenkins Holomorphic motions and structural stability for polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$

Indiana University Mathematics Journal **57** (2008) 277–308

Léa Blanc–Centi

Om Gromov-hyperbolicitet hos Kobayashi-metriken på strikt pseudokonvexa områden i det nästan-komplexa fallet

Kobayashi-metriken som introducerades 1967 är en viktig (biholomorft) invariant metrik. Den har använts för att studera holomorfa avbildningar och funktionsrum i flera komplexa variabler, men konstruktionen fungerar även i det nästan-komplexa fallet. På enhetsskivan i $\mathbf{C}$ sammanfaller Kobayashi-metriken med den klassiska Poincaré-metriken. För Poincaré-metriken gäller att enhetsskivan är hyperbolisk och att dess isometrier och geodeter är explicit kända. Det är mycket svårare att få någon information om det globala beteendet hos geodeterna för Kobyashi-metriken på ett område i högre dimension eftersom det i allmänhet inte finns några explicita formler.

Vi fokuserar här på strikt J-konvexa områden i nästan-komplexa mångfalder, det vill säga områden med en definierande funktion som är strikt J-plurisubharmonisk. Det har bedrivits omfattande studier om det lokala beteendet hos Kobayashi-metriken i detta fall. Infinitesimalt mäter Kobayashi-metriken storleken på pseudo-holomorfa skivor inuti området och vi känner till flera uppskattningar nära randen, även i det nästan-komplexa fallet. Vår avsikt här är att titta på den storskaliga strukturen av Kobayashi-metriken. Mer precist vi vill beskriva beteendet hos geodeterna.

Viktigt för oss är begreppet δ-Gromov-hyperbolicitet, en egenskap hos metriska rum som grovt talat beskriver deras storskaliga uppförande. Ett geodetiskt metriskt rum sägs vara δ-hyperboliskt om storleken på varje geodetisk triangel är mindre än δ, för något $\delta > 0$ som bara beror på rummet. Vi bevisar att varje begränsat strikt J-konvext område D som är utrustat med Kobayashi-metriken är ett Gromov-hyperboliskt rum. Noterbart är att detta globala resultat om Kobayashi-metriken erhålles *utan* det vanliga antagandet att den nästan-komplexa strukturen är en liten störning av standardstrukturen.

Till sist tillämpar vi detta resultat på studiet av dynamiken för pseudoholomorfa avbildningar $F\colon D \to D$. Tack vare det faktum att pseudoholomorfa avbildningar kan ses som semi-kontraktioner av Gromov-hyperboliska rum erhåller vi ett Wolff-Denjoy-resultat som säger att alla banor $\{F^k(x)\,;\ k \in \mathbf{N}\}$ antingen håller sig borta från randen ∂D eller har en gemensam gränspunkt $p \in \partial D$.

Litteraturhänvisning

LÉA BLANC–CENTI On the Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex regions in the almost complex case

Mathematische Zeitschrift **263** (2009) 481–498

László Lempert

Analytiska kärvar i Banach-rum

I ett gemensamt arbete med Imre Patyi har vi nyligen introducerat en typ av kärvar i Banach-rum, som vi kallar för *kohesiva kärvar.* Kohesiva kärvar ersätter den viktiga klassen av koherenta kärvar, när man övergår från analys i ändligt dimensionella rum till rum med oändlig dimension. Definitionen påminner om den för koherenta kärvar i termer av fria upplösningar, men den är lite mer komplicerad.

Låt X och E vara komplexa Banach-rum, och Ω en öppen delmängd av X. Kärven $\mathcal{O}^E$ av groddar av E-värda holomorfa funktioner på öppna delmängder av Ω kallar vi då en banal kärve. Den är speciellt en kärve av $\mathcal{O}$-moduler i vanlig mening. Med en *analytisk kärve* menar vi en kärve $\mathcal{A}$ av $\mathcal{O}$-moduler tillsammans med ett val, för varje banal kärve $\mathcal{E}$, av en speciell delmodul $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ av homomorfikärven $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$. Betrakta nu en oändlig följd

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

av analytiska kärvar och $\mathcal{O}$-homomorfier, där varje $\mathcal{F}_k$ är en banal kärve. Detta kallas för en *fullständig upplösning* av $\mathcal{A}$ om alla motsvarande följder

$$\ldots \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

för sektioner över pseudokonvexa öppna delmängder $U \subset \Omega$ är exakta, och om detsamma gäller när $\mathcal{A}$ och $\mathcal{F}_k$ ersätts med $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ och $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}_k)$. En analytisk kärve kallas nu kohesiv om den lokalt medger en fullständig upplösning.

På Banach-rum X som har en så kallad villkorslös Schauder-bas, har vi bevisat att många vanligen förekommande kärvar är kohesiva. Dit hör kärven av sektioner till holomorfa Banach-knippen och idealkärven för så kallade direkta delmångfalder. Vidare har vi visat att för kohesiva kärvar över pseudokonvexa områden i rum med en villkorslös bas så gäller de analoga utsagorna till Cartans satser A och B. Sats B säger som bekant att alla deras högre kohomologigrupper är triviala.

Det finns anledning att misstänka att våra resultat kan utsträckas till att gälla på alla Banach-rum med en (inte nödvändigtvis villkorslös) Schauder-bas. Detta är viktigt, eftersom alla separerbara Banach-rum som uppkommer i praktiken har en Shauder-bas, medan vissa av dem, som till exempel rum av kontinuerliga funktioner över kompakta rum, faktiskt saknar villkorslös bas.

Litteraturhänvisning

LÁSZLÓ LEMPERT & IMRE PATYI Analytic sheaves in Banach spaces
Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure **40** (2007) 453–486

Alexey Shchuplev

Residykärnor med singulariteter på koordinatplan

En ändlig uppsättning plan $Z = \bigcup\{E_\nu\}$ i $\mathbf{C}^d$ kallas för en atomär familj om det sista Bettitalet hos de Rham-kohomologin för komplementet $\mathbf{C}^d \setminus Z$ är lika med ett. En sluten differentialform som genererar motsvarande kohomologigrupp kallas för en residykärna för den atomära familjen. De enklaste exemplen på atomära familjer är dels origo, dels unionen av samtliga koordinathyperplan. Motsvarande residykärnor är Bochner-Martinelli-formerna respektive Cauchy-formerna, som ger upphov till välkända integralrepresentationsformler. Vi konstruerar nya residykärnor i fallet då E_ν är koordinatplan sådana att komplementet $\mathbf{C}^d \setminus Z$ tillåter en torisk verkan G vars banrum är homemomorft med en kompakt projektiv torisk varietet. Dessa kärnor är generaliseringar av Bochner–Martinelli-former och av och Sorani-former.

Vår utgångspunkt är observationen att Bochner-Martinelli-formen faktiskt inte bara är singulär i origo i $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{P}_n$ utan också längs hyperplanet i oändligheten i $\mathbf{P}_n$. I en omgivning av detta hyperplan $\mathbf{P}_{n-1}$ är formen en produkt av Fubini–Studys volymform på $\mathbf{P}_{n-1}$ och den endimensionella Cauchy-kärnan

$$\eta_{BM} = \omega_{FS} \wedge \frac{d\zeta_{n+1}}{\zeta_{n+1}}.$$

Därför är det avgörande för vår konstruktion att det existerar en mångfald i vilken vi kan bädda in $\mathbf{C}^d \setminus \bigcup E_\nu$ och motsvarande toriska varietet på liknande sätt som $\mathbf{C}^n$ och $\mathbf{P}_{n-1}$ kan sättas ihop till $\mathbf{P}_n$.

Låt nu Σ vara en simpliciell fullständig solfjäder i $\mathbf{R}^n$ med d generatorer. Till Σ hör en atomär familj $Z(\Sigma)$ och en kompakt torisk varietet X_Σ av dimension n. Man kan realisera X_Σ som ett kvotrum $(\mathbf{C}^d \setminus Z(\Sigma))/G$ med en lämplig torisk grupp G. Vi bevisar existensen av en annan d-dimensionell simpliciell kompakt torisk varietet

$$X_{\widetilde{\Sigma}} = \mathbf{C}^d \sqcup (\mathcal{X}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{X}_r)$$

med toriska hyperytor $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ i "oändligheten" vars snitt $\mathcal{X}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{X}_r$ är isomorft med X_Σ. För varje $\zeta \in \mathbf{C}^d \setminus Z(\Sigma) \subset X_{\widetilde{\Sigma}}$ så skär dessutom motsvarande slutna bana $\overline{G \cdot \zeta}$ snittet $\mathcal{X}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{X}_r$ i en entydig punkt som under isomorfin avbildas på klassen $[\zeta] \in X_\Sigma$.

Vår kärna är nu den yttre produkten av en volymform på X_Σ (i dess homogena koordinater) och den r-dimensionella Cauchy-kärnan. För varje kärna presenterar vi också den duala $(d+n)$-dimensionella cykeln och motsvarande integralrepresentationsformel för holomorfa funktioner i ett särskilt Reinhardt-område.

Litteraturhänvisning

ALEXEY SHCHUPLEV, AUGUST TSIKH & ALAIN YGER Residual kernels with singularities on coordinate planes

Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **253** (2006) 256–274

Berit Stensønes

Holomorfienveloppen för tvåsfärer

Låt Γ vara en reell tvådimensionell mångfald i $\mathbf{C}^2$ som är topologiskt ekvivalent med den vanliga sfären S^2. Vi antar att Γ har ändligt många komplexa tangentpunkter och att $\Gamma \subset \partial\Omega$, där Ω är ett begränsat pseudokonvext område med reellanalytisk rand. För varje komplex tangentpunkt $p \in \Gamma$ finns lokala holomorfa koordinater (z, w) kring p så att Γ ges av

$$w = |z|^{2k} + \lambda \operatorname{Re}\left(z^{2k}\right) + E_{2k}(z, \bar{z}) + O\left(|z|^{2k+1}\right).$$

Den blandade termen E_{2k} har formen $\sum a_{m,n} z^m \bar{z}^n$, med $m+n = 2k$, $m \neq n$ och $m, n \neq 0$, så speciellt är $E_2 = 0$.

Vi vill beskriva holomorfienveloppen till Γ. Fallet då Ω är strikt pseudokonvext, och alltså de komplexa tangenterna bara har andra ordningens kontakt ($k = 1$ ovan), har tidigare studerats av Eric Bedford med Bernard Gaveau och med Wilhelm Klingenberg. Vi säger att en tangentpunkt p är av *elliptisk typ* om

$$\lambda + \sum_{m<n} (2 - \frac{m}{k})|a_{m,n}| + \sum_{m>n} |a_{m,n}| < 1$$

och att p är av *hyperbolisk typ* om $\lambda > 1$.

Vårt huvudresultat säger nu att om alla (ändligt många) komplexa tangentpunkter på Γ är

- antingen av elliptisk typ
- eller av hyperbolisk typ så att $\sum |a_{m,n}| < \min\{\, |\lambda - 1|/3 \,,\, 1/6 \,\}$

så är holomorfienveloppen till Γ en slät reell tredimensionell mångfald M som är folierad av analytiska skivor och vars rand ∂M sammanfaller med Γ.

Det faktum att enveloppen blir slät följer från ett välkänt resultat av Carlos Kenig och Sidney Webster från 1982.

Litteraturhänvisning

HYUNSUK KANG & BERIT STENSØNES Envelope of holomorphy of certain 2-manifolds in $\mathbf{C}^2$ *International Journal of Mathematics* **22** (2011) ??–??

Nikolay Kruzhilin

Proper verkan av Lie-grupper på komplexa mångfalder

Vi ger en komplett explicit beskrivning av alla par (M, G) där M är en sammanhängande komplex mångfald av komplex dimension $n \geq 2$ och G är en sammanhängande Lie-grupp av dimension n^2+1 som verkar effektivt och propert på M genom holomorfa transformationer. Detta resultat kompletterar den kända klassifikationen för dimensionerna mellan n^2+2 och n^2+2n.

Om gruppen har dimension $> n^2$ så är M med nödvändighet homogen, och klassificeringen beror då på stabilisatorgruppen I_p av en (godtycklig) punkt $p \in M$. Låt oss presentera de möjliga fallen.

I. Om $n = 3$ och $I_p = e^{i\mathbf{R}}SO_3(\mathbf{R})$, i lämpliga lokala koordinater, så är paret (M, G) ekvivalent med ett av följande:

(I_i) Paret $(\mathcal{S}, \mathrm{Aut}\,(\mathcal{S}))$, där $\mathcal{S} = \{(z_1, z_2, z_3)\,;\ Z\bar{Z} \ll \mathrm{Id}\}$ är Siegel-området som ges av

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

(I_{ii}) Paret $(\mathcal{Q}, SO_5(\mathbf{R}))$, där $\mathcal{Q}$ är en komplex kvadratisk trefald och $SO_5(\mathbf{R})$ realiseras som en maximal komplex delgrupp till $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{Q})$.

(I_{iii}) Paret $(\mathbf{C}^3, e^{i\mathbf{R}}SO_3(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{C}^3)$.

II. Om $n \geq 3$ och I_p är $SU_{n-1} \times U_1$, sedd som gruppen av alla matriser

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

där $A \in SU_{n-1}$ och $\theta \in \mathbf{R}$, så är (M, G) ekvivalent med $\big(\mathbf{C}^{n-1} \times M', (SU_{n-1} \ltimes \mathbf{C}^{n-1}) \times G'\big)$, där M' är endera av $\mathbf{B}^1 = \{|z| < 1\}$, $\mathbf{C}$ eller $\mathbf{CP}^1$ och G' är $\mathrm{Aut}\,\mathbf{B}^1$, $\mathrm{Isom}\,\mathbf{C}$ respektive $\mathrm{Isom}\,\mathbf{CP}^1$.

III. Om I_p är gruppen $H^n_{k_1,k_2}$ av alla matriser

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

där $k_1 > 0$ och k_2 är fixa relativt prima heltal, $A \in U_{n-1}$ och $a \in (\det A)^{k_2/k_1}$, så finns det en lista på 21 explicit beskrivna fall av komplexa mångfalder med gruppverkan som fullbordar klassificeringen.

Litteraturhänvisning

ALEXANDER ISAEV & NIKOLAY KRUZHILIN Proper actions of Lie groups of dimension n^2+1 on n-dimensional complex manifolds
Israel Journal of Mathematics **172** (2009) 193–252

Mihai Păun

Om invarians för plurigenera

Låt avbildningen $\mathcal{X} \to \Delta$ definiera en slät familj av projektiva komplexa mångfalder över enhetsskivan Δ, och låt $L \to \mathcal{X}$ vara en linjebunt försedd med en, eventuellt singulär, hermitesk metrik h_L som uppfyller följande två villkor:

(1) krökningen $\Theta_{h_L}(L)$ är en positiv ström på $\mathcal{X}$;

(2) metriken h_L har en väldefinerad restriktion till den centrala fibern $\mathcal{X}_0$.

I en serie anmärkningsvärda arbeten har Yum-Tong Siu nyligen visat att varje sektion på $\mathcal{X}_0$ till den plurikanoniska bunten $mK_{\mathcal{X}_0} + L$, som är *begränsad* med avseende på metriken h_L, kan utvidgas till hela $\mathcal{X}$.

Vår avsikt är att presentera en generalisering av Sius utvidgningssats, och samtidigt förenkla dess bevis. Låt $\mathcal{I}(h_{L|\mathcal{X}_0})$ beteckna multiplikatoridealkärven för metriken på den centrala fibern, det vill säga kärven av groddar av holomorfa funktioner med nollställen av tillräckligt hög ordning längs singulariteterna hos $h_{L|\mathcal{X}_0}$ för att vara kvadratiskt integrabla med avseende på denna metrik. Vi visar att varje sektion till bunten

$$(mK_{\mathcal{X}_0} + L) \otimes \mathcal{I}(h_{L|\mathcal{X}_0})$$

har en utvidgning till hela $\mathcal{X}$. Vi kan med andra ord ersätta Sius L^∞-antagande med ett L^2-villkor.

Beviset börjar med att vi väljer en så ampel linjebunt $A \to \mathcal{X}$ att de plurikanoniska buntarna $pK_{\mathcal{X}_0} + A$ genereras av sina globala sektioner (s_j^p) för $0 \leq p \leq m-1$. Här utnyttjar vi att familjen $\mathcal{X} \to \Delta$ är projektiv. Betrakta nu en sektion $\sigma \in H^0(\mathcal{X}_0, mK_{\mathcal{X}_0})$ som vi vill utvidga. Om A är väl vald kommer sektionerna $\sigma \otimes s_j^0$ att utvidgas till $\mathcal{X}$ och inducera en metrik h^0 på $mK_{\mathcal{X}_0} + A$, vars singulariteter precis ges av nollställena till σ på $\mathcal{X}_0$. Ett avgörande steg är sedan att använda Ohsawa–Takegoshis sats för att utvidga de h^0-integrabla sektionerna $\sigma \otimes s_j^1$ till $\mathcal{X}$. Genom att iterera denna procedur får man sektioner $\sigma^k \otimes s_j^p$ på $\mathcal{X}$ som ger upphov till metriker h_k^p på buntarna $(km+p)K_{\mathcal{X}} + A$. Slutligen, genom att göra rotutdragning och ta gränsvärdet $k \to \infty$ kan vi eliminera A och få den sökta utvidgningen till $mK_{\mathcal{X}}$.

Litteraturhänvisning

MIHAI PĂUN Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof
Journal of Differential Geometry **76** (2007) 485–493

Elin Götmark

Explicit representation av medlemskap i polynomideal

Detta är ett samarbete med Mats Andersson. Låt $F_1, \ldots, F_m$ vara polynom i $\mathbf{C}^n$ som har graderna $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_m$, och anta att Φ är ett polynom som försvinner på mängden där alla F_j är lika med noll. Enligt Hilberts nollställesats kan man då hitta polynom Q_j sådana att $\sum_j F_j Q_j = \Phi^\nu$ om potensen ν är tillräckligt stor. Mycket arbete har lagts ner på att hitta effektiva versioner av detta resultat, där man vill ha kontroll på ν och på graderna hos Q_j i termer av graderna på F_j. Ett optimalt sådant resultat bevisades 1988 av János Kollár med hjälp av algebraiska metoder.

Vi betraktar följande relaterade problem. Givet ett element $\Phi = \sum_j F_j Q_j$ i polynomidealet (F), så vill vi finna explicita uttryck för Q_j med uppskattningar av deras grader. För att uppnå detta homogeniserar vi först Φ och $F_1, \ldots, F_m$ så att de blir sektioner ϕ och $f_1, \ldots, f_m$ av linjebuntar över $\mathbf{P}^n$. Med hjälp av viktade integralrepresentationsformler i $\mathbf{P}^n$ kan vi hitta en divisionsformel

$$\Phi(z) = \sum_j F_j(z) \int_{\mathbf{P}^n} H_j U \phi + \int_{\mathbf{P}^n} H R \phi$$

som gäller under lämpliga antaganden. I formeln är U en ström som är slät utanför den gemensamma nollställemängden $Z \subset \mathbf{P}^n$ för sektionerna f_j, medan R är en ström som har stöd på Z. Vidare är H_j differentialformer som är släta i både z och integrationsvariabeln, och som har homogena polynom som koefficienter.

Om ϕ annihilerar R så får vi en lösning till divisionsproblemet, och genom att undersöka graderna hos H_j kan vi få en uppskattning av Q_j:s grader. Ett exempel på våra resultat är följande: Anta att kodimensionen av Z i $\mathbf{C}^n$ är minst m, och att Φ ligger i idealet (F). Då har vi explicita lösningar Q_j till $\sum_j F_j Q_j = \Phi$, sådana att

$$\deg(F_j Q_j) \leq \max\left(\deg \Phi + \lceil m\nu_\infty \rceil, \, d_1 + \ldots + d_m - n\right),$$

där ν_∞ är ett icke-negativt rationellt tal som ungefär beskriver hur stor "kontaktyta" Z har mot hyperplanet i oändligheten. Om $m \leq n$ gäller alltid $\nu_\infty \leq d_1 \cdots d_m$, men detta är en grov uppskattning, och talet är oftast mycket mindre. Även i klassiska fall leder detta till explicita lösningar som (så vitt vi vet) är nya. Om vi exempelvis tar $m \geq n+1$ och $Z = \varnothing$ så ger satsen lösningar Q_j till $\sum_j F_j Q_j = 1$ med $\deg(Q_j F_j) \leq d_1 + \ldots + d_{n+1} - n$. Detta är samma graduppskattningar som i Francis Macaulays klassiska sats.

Litteraturhänvisning

MATS ANDERSSON & ELIN GÖTMARK Explicit representation of membership in polynomial ideals *Mathematische Annalen* **349** (2011) 345–365

Yum-Tong Siu

Multiplikatoridealkärvar för partiella differentialekvationer

Föredragets första del behandlar problemet att effektivt terminera Joseph Kohns algoritm för konstruktion av multiplikatorideal för pseudokonvexa områden av ändlig typ. Man startar med ett begränsat pseudokonvext område D i $\mathbf{C}^n$ med slät rand. Området antas vara av ändlig typ i den meningen att den normaliserade kontaktgraden för en lokal holomorf kurva mot randen ∂D i en punkt $p \in \partial D$ är begränsad av ett ändligt tal m, samma för alla p. Normaliseringen innebär att kontaktgraden divideras med den holomorfa kurvans multiplicitet i den aktuella randpunkten.

Problemet går ut på att bevisa att $\bar{\partial}$-ekvationen på D kan lösas med en subelliptisk uppskattning av en viss subelliptisk ordning ε, vilken effektivt kan beräknas från m med hjälp av Kohns algoritm för multiplikatorideal. Vi presenterar en metod som leder till en lösning av problemet för en speciell klass av områden, nämligen sådana vars rand kan definieras genom

$$\operatorname{Re}(z_n) = |F_1(z')|^2 + |F_2(z')|^2 + \ldots + |F_N(z')|^2 ,$$

där F_j är holomorfa funktioner i variablerna $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Vi diskuterar också hur metoden skulle kunna generaliseras till det allmänna fallet.

Den avslutande delen av föredraget rör användandet av komplexa Monge–Ampère-ekvationer och multiplikatorideal för att ge ett analytiskt bevis för existensen av rationella kurvor i Fano-mångfalder. Det hittills enda kända beviset bygger på Shigefumi Moris algebraiska argument i positiv karakteristik. Trots att problemet i sig är ett problem i komplex geometri saknas det alltså fortfarande analytiska verktyg för att angripa det. Den metod vi presenterar här använder sig av en särskild sorts Monge–Ampère-ekvation som har egenskapen att förstora singulariteten hos sin multiplikatoridealkärve under den process då lösningen till ekvationen konstrueras med hjälp av kontinuitetsmetoden. Forskning kring denna metod pågår fortfarande.

Litteraturhänvisningar

YUM-TONG SIU Effective termination of Kohn's algorithm for subelliptic multipliers *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **6** (2010) 1169–1241

YUM-TONG SIU Dynamic multiplier ideal sheaves and the construction of rational curves in Fano manifolds *Acta Universitatis Upsaliensis* **86** (2009) 323–360